

RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE PAR PETITES PERTURBATIONS D'UN ECOULEMENT POTENTIEL INCOMPRESSIBLE

Applications à des profils isolés ou montés en veine
et à des aubages de machines hydrauliques

THESE No 744 (1988)

PRESENTEE AU DEPARTEMENT DE MECANIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES TECHNIQUES

PAR

JEAN-NICOLAS FAVRE

Ingénieur mécanicien diplômé EPFZ
originaire d'Ormont-Dessus (VD)

acceptée sur proposition du jury :

Prof. Dr I. L. Ryhming, rapporteur
Dr F. Avellan, corapporteur
Prof. P. Henry, corapporteur
Dr J.-M. Michel, corapporteur
Prof. Dr H. Thomann, corapporteur

Lausanne, EPFL
1988

Remerciements

Que tous les membres de jury soient ici remerciés pour le soutien, l'intérêt et l'attention qu'ils ont portés à ce travail, soient : Monsieur le Professeur Inge Ryhming, directeur de thèse, ainsi que les corapporteurs : Monsieur François Avellan, Monsieur le Professeur Pierre Henry, Monsieur Jean - Marie Michel (INP Grenoble) et Monsieur le Professeur Hans Thomann (EPFZ).

Ce travail n'aurait pu être réalisé sans un apport extérieur à l'école, je remercie à ce titre les sociétés Sulzer Frères, SA à Winterthur, les Ateliers de Constructions Mécaniques de Vevey, SA, et la CERS, Commission pour l'Encouragement à la Recherche Scientifique pour leur soutien dans la création du Groupe Cavitation de l'IMHEF ainsi que leur appui financier et logistique.

Je remercie également tous les membres du Groupe Cavitation, dirigé par Monsieur François Avellan, pour l'entraide et l'atmosphère à la fois sympathique et favorable à la réflexion, soient Messieurs Dan Carare, Philippe Dupont, Mohamed Farhat, Bernard Gindroz, Yan Kuhn de Chizelle, Sadi Ridah et Louis Bezençon, sans oublier Mademoiselle Chantal Sztur, stagiaire INP Grenoble en automne 1987.

En ce qui concerne les applications pratiques de la méthode, je remercie Monsieur le Professeur Per Age Krogstad et Monsieur Gorm Jenssen (NTH Trondheim, Norvège), Messieurs Gerald Vullioud et Willy Walther (ACM Vevey), ainsi que le Docteur Helmut Keck (Sulzer Escher Wyss).

Un merci tout particulier va enfin aux deux dessinatrices de notre institut, Mesdemoiselles Maria Anitua et Regina Strassburg, qui ont réhaussé l'allure de ce travail par leurs illustrations.

Lausanne, Les Cèdres, Juillet 1988

Nous avons tendance à oublier nos erreurs, si elles ne sont connues que de nous.

La Rochefoucauld

Savoir ne pas savoir est un grand savoir, mais le pire des savoirs est de prendre pour savoir ce qui n'est point savoir.

Lao Tseu

RÉSUMÉ

Le travail présenté ici consiste à développer et présenter quelques applications d'une méthode originale de calcul inverse d'écoulement potentiel incompressible et bi-dimensionnel servant à l'amélioration du tracé d'aubage.

A ce titre, une méthode de calcul direct dérivée de la méthode classique des panneaux avec répartition de singularités a été développée, son originalité consiste en ce que les panneaux sont situés à l'intérieur du profil, que le profil soit isolé ou en grille. Le traitement des coefficients d'influence est identique pour tous les cas, y compris celui où le point de contrôle est proximal, car il est toujours en dehors du panneau. En outre les coefficients sont intégrés le long de la différentielle complexe $dz = dx + idy$, alors que dans les autres méthodes, les axes sont déplacés pour chaque panneau de telle sorte qu'il se trouve situé sur l'axe des x ($dz = dx$), les coefficients étant transposés ensuite dans le système original.

La méthode inverse proprement dite est ensuite développée à partir de la méthode directe, en appliquant des petites perturbations à la répartition de pression calculée sur le profil dit de base. Ensuite, des perturbations de singularités sont calculées à partir des perturbations de pression par la résolution d'un système linéarisé. La nouvelle répartition de singularités permet de calculer les composantes modifiées de la vitesse, qui déterminent la variation locale de la pente du profil. Le profil modifié est finalement obtenu par l'intégration de ces pentes en partant du bord de fuite.

Cette méthode est ensuite appliquée à des profils isolés, puis à l'amélioration du comportement d'aubages hydrauliques cavitant, le calcul étant effectué sur des surfaces de courant obtenues par intersection de cylindres avec l'aubage (écoulement axial). La faisabilité de cette méthode est démontrée ensuite par une application sur un modèle de roue de turbine Kaplan. Des mesures et des visualisations réalisées en comportement cavitant avec l'aubage modifié à partir de la méthode inverse permettent de constater une nette amélioration de celui-ci. Le fonctionnement de la méthode n'est pas perturbé par l'imposition de perturbations relativement grosses (environ une pression dynamique), même s'il s'agit d'une méthode développée pour des petites perturbations.

Une application à des écoulement cavitant proprement dit, c'est à dire au calcul de poches de cavitation partielle sur un profil et de l'écoulement résultant, est ensuite réalisée. Cette modélisation permet de dégager des constatations intéressantes par la comparaison avec des mesures de pression et des visualisations effectuées dans le tunnel hydrodynamique de cavitation de l'IMHEF.

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Arbeit beschreibt die Entwicklung einer sogenannten inversen Methode für die Optimierung von Einzelprofilen sowie Schaufelgittern, wobei eine inkompressible 2-D potentialströmung vorausgesetzt wird. Die Leistungsfähigkeit der Methode wird an Hand von einigen Beispielen demonstriert.

Es wurde ein Singularitätsverfahren entwickelt, das auf der klassischen Panel-Methode beruht. Die Besonderheit des Verfahrens besteht darin, dass nämliche Panels innerhalb des Profilkontour liegen. Deshalb können die Einzelkoeffizienten eines Panels auf den nächstgelegenen Kontrollpunkt mit derselben Prozedur berechnet werden, wie die übrigen Einflusskoeffizienten. Die Berechnung der Einflusskoeffizienten erfolgt, im Gegensatz zu anderen Panel-Verfahren, direkt durch Integration entlang des komplexen Differentials $dz = dx + i dy$, ohne den betreffenden Panel auf die x-Achse zu transformieren

Die inverse Methode wird mit Hilfe der direkten Methode entwickelt, in dem kleine Störungen der auf dem Basisprofil berechneten Druckverteilung überlagert werden. Dann werden die Singularitätsstörungen aus der neuen Druckverteilung, durch die Lösung eines linearisierten Systems, berechnet. Die neue Singularitätsverteilung erlaubt die Berechnung der beiden neuen Geschwindigkeitskomponenten und der Neigungen ($y' = \frac{V_y}{V_x}$) um das ganze Profil. Die modifizierte Profilform kann im letzten Schritt durch Integration dieser Neigungen berechnet werden.

Diese Methode wird an einzelnen Profilen, sowie bei der Verbesserung des Kavitations Verhaltens hydraulischer Beschaufelungen angewendet. Die Berechnungen werden auf zylindrischen Stromflächen durchgeführt. Die industrielle Brauchbarkeit dieser Methode wird durch eine Anwendung an einem Model einer Kaplan-Turbine gezeigt. Messungen und Aufnahmen der Kavitationsbilder vor und nach der Neuprofilierung sind eindeutige Beweise für die starke Verbesserung, die unter Verwendung der inversen Methode erzielt wurde.

Das Lösungsverfahren erträgt relativ grosse Störungen (in der Grössenordnung des dynamischen Druckes), obwohl es für kleine Störungen linearisiert worden ist.

Eine Erstreckung der Methode auf kavitierende Profile wird für die Berechnung der auf einer Profilverderrkante liegenden Kavitationsblase und der resultierenden Umströmung durchgeführt. Diese Modellierung erlaubt, interessante Erkenntnisse durch den Vergleich mit Druckmessungen und Beobachtungen auf einem Profil im Hochgeschwindigkeitswasserkanal des IMHEF zu ziehen.

I. Généralités

1. Introduction	3
2. Développement d'une machine axiale ou semi-axiale suivant une grille d'aubes plane	7
3. Conditions aux limites et construction du potentiel	10
4. Distribution des singularités, fonctions élémentaires	14

II. Calcul de l'écoulement

1. Profil isolé	17
2. Grille droite	38

III. Perturbation de la distribution des pressions

1. Situation du problème inverse	47
2. Choix des paramètres de la perturbation	47
3. Méthode de perturbation aux différences finies	48
4. Méthode elliptique de perturbation	51
5. Illustration de l'interdépendance des variables	54

IV. Données et caractéristiques de la cavitation dans une machine

1. Chiffre de cavitation	57
2. Développement et influence de la cavitation	58
3. Cavitation à poche partielle au bord d'attaque	62
4. Relation entre pressions calculées et chiffre de cavitation	66
4.1. Turbine	
4.2. Pompe	

V. Application à un profil isolé

1. Remarques générales	71
2. Application à un profil isolé à coefficient de frottement minimal	72

VI. Applications à différentes machines

1. Grille d'aubes	81
2. Analyse de la cavitation à l'entrée d'une pompe radiale et amélioration du comportement cavitant	83
3. Application sur des roues de type Kaplan	86
3.1. Application sur 4 coupes cylindriques d'une roue suivie de l'exécution et de mesures	
3.2. Application sur un filet proche du moyeu	

VII. Application au calcul de poche de cavitation partielle

1. Adaptation du calcul inverse	101
2. Application à un profil monté en veine	103
2.1 Validation hors cavitation	
2.2 Calcul de poche et comparaison	

VIII. Conclusions 115**Références** 117**Annexes** 121

- A. Passage de la notation vectorielle à la notation complexe
 Rappel sur les fonctions complexes
- B. Intégration analytique des coefficients d'influence
- C. Sommation de l'influence des aubes de la grille
- D. Intégration numérique des coefficients en grille
- E. Lissage du profil, raccord au bord d'attaque et spline
- F. Détermination de courbe (φ, ψ) à partir du calcul potentiel
- G. Intégration d'une courbe entre 2 points fixes
- H. Disposition des panneaux dans le profil

Symboles et notations 142

I. GÉNÉRALITÉS

I.1. introduction.

Il est très rare, dans le domaine des machines hydrauliques, que le premier dimensionnement d'un aubage satisfasse en tout point aux exigences fixées par les conditions d'utilisation de la machine. Il faut alors, dans la mesure de nos possibilités, corriger en certains endroits l'épaisseur, voire le squelette de l'aubage, en fonction d'une analyse liée aux essais et au calcul des pressions et mettant en évidence les risques aux points de fonctionnement considérés. Ce processus peut s'avérer long et coûteux, surtout si de nombreuses itérations entre le modéliste et l'ingénieur sont nécessaires, c'est pourquoi il devient nécessaire, avec l'augmentation des coûts des essais de machines, de réduire leur durée en appliquant des méthodes permettant de suppléer aux essais sans toutefois les remplacer, ceux-ci étant indispensables.

Le travail présenté consiste en une méthode de calcul bi-dimensionnelle permettant d'analyser puis d'améliorer le comportement d'un aubage en fonction de certains risques, dans ce cas particulier, celui de la cavitation, mais cela ne ferme évidemment pas la porte à d'autres applications. Le problème se pose de la façon suivante : soit un profil hydraulique situé, pour le cas de machines tournantes, dans une configuration grille autour duquel la répartition de pression calculée à une certaine incidence ou dans un domaine d'incidences présente des pics indésirables de dépression ou de dangereux gradients de pression pour la couche limite, dès lors on impose une nouvelle répartition de pression qui, au moyen d'une méthode dite inverse, permet de déterminer un nouveau profil proche du précédent et sur lequel la répartition de pression correspond à celle souhaitée. Le but de cette étude n'est pas d'étudier la cavitation proprement dite et ses effets dans un aubage, mais de connaître tout au moins ses causes afin de retarder son apparition aussi loin que les conditions d'exploitation l'exigent et ceci dans la mesure de nos possibilités technologiques. Il est de première importance de mentionner que l'apparition de poches de cavitation est fortement liée non seulement au niveau de pression environnant, mais encore au développement de la couche limite dans des zones à fort gradient de pression. On sait qu'une couche limite, en général laminaire au début du bord d'attaque, décolle plus facilement en présence d'un gradient de pression positif que si elle est turbulente. En cas de décollement de cette couche, on assiste à la création, en aval de celui-ci, d'une zone propice au développement d'une poche de cavitation, pour autant bien évidemment que le niveau de pression local soit encore en dessous de la pression de vapeur. A vitesse plus élevée, le décollement laminaire ne survient que pour des grandes incidences situées vers les

limites du domaine d'utilisation de la machine, par contre la poche peut se développer dès qu'une rugosité de la surface a créé une toute petite zone morte en aval .

En réduisant alors les pics de dépression et par conséquent les gradients de pression correspondants, on diminue fortement le danger d'apparition d'une poche de cavitation.

Cette étude de faisabilité va concerner essentiellement les aubages axiaux ou semi-axiaux où l'on peut se ramener à une étude bi-dimensionnelle de l'écoulement : en effet , selon l'hypothèse qu'une particule fluide se déplace autour d'un cylindre de même axe que l'aubage et de rayon constant, on peut considérer, après avoir déroulé l'intersection de ce cylindre avec l'aubage, l'écoulement de cette particule dans la grille d'aubes droite ainsi obtenue.

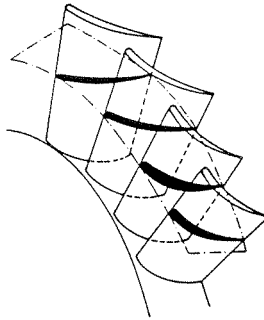
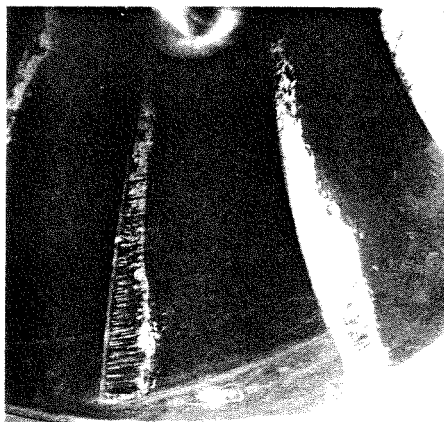


Fig. I.1 Surface de courant avant le déroulement sur un plan

D'autre part, on pourra aussi appliquer cette méthode à l'aubage d'entrée de machines radiales, puisqu'il est possible de transformer une grille centrée en une grille droite, mais cela suppose une bonne connaissance préalable de l'écoulement méridien avant l'aubage et de la géométrie du bord d'attaque, celle-ci étant très tourmentée au niveau du rattachement de l'aube au moyeu et à la couronne.

Écoulement cavitant
à l'entrée d'une
pompe centrifuge.

Cet écoulement est
bi-dimensionnel sur
les premiers % de
l'aube.



Dans les calculs d'écoulement, on parle de problème direct ou indirect et de problème inverse, on entend par résolution du problème indirect, le calcul des vitesses et des pressions pour une géométrie donnée, le problème dit direct est la recherche de la forme du corps comme résultat de la combinaison de solutions élémentaires de l'équation de Laplace. La résolution du problème inverse représente quant à elle le calcul d'une géométrie en fonction de pressions et/ou de vitesses données. Par commodité et analogie avec la littérature anglophone, on appellera dans cette étude tous les calculs de pression et de vitesses: méthode directe. Pour aborder le problème inverse d'un écoulement incompressible dans une grille d'aubes, il faut mentionner que les différentes méthodes de calcul indirect ont évidemment conditionné le choix des méthodes inverses et qu'il existe en gros quatre écoles distinctes.

La première méthode se base sur les transformations conformes, ce qui donne de bons résultats pour le tracé de profils isolés mais devient vite complexe dans la résolution de grilles, il faut ajouter que l'utilisation de cette transformation ne permet pas la transposition ultérieure au problème tri-dimensionnel [1], [2]. Une deuxième école est basée sur la méthode des hodographes [3], [4], [5], [6], [7], [8]. Viennent ensuite les méthodes dérivées de la solution des équations intégrales [9], [10]. Enfin, on note la formulation du problème inverse par des solutions exactes, distributions de singularités de différents types [12], il faut noter que dans cette dernière méthode, la distance entre chaque profil, appelée le pas de la grille, n'est pas fixée au départ, alors que, dans la conception des machines hydrauliques, les vitesses d'entrée et de sortie ainsi que le pas sont la base de la conception de l'aubage. On peut mentionner en outre que différents groupes travaillent à des méthodes inverses dans un maillage [11], ces

méthodes sont orientées vers les écoulements compressibles et sortent du cadre de cette discussion.

L'utilisation de grilles d'aubes dans les calculs industriels donne lieu à une vaste gamme de problèmes et chaque firme ou chaque secteur se doit d'adapter une méthode de résolution inverse à son problème spécifique, qu'il s'agisse de pompes, compresseurs ou turbines axiaux ou radiaux, ou bien de ventilateurs ou d'éoliennes.

En l'occurrence, les exigences sont de disposer ici d'une méthode d'analyse bi-dimensionnelle d'écoulement dans une grille donnée qui permette de transformer le profil utilisé, il ne s'agit donc pas de créer des tout nouveaux profils ex nihilo, mais d'améliorer des géométries déjà existantes en corrigeant leur forme même sur une toute petite longueur relative (5-10% de la corde). Tout en n'excluant d'ailleurs pas d'autres applications de la méthode développée. Les vitesses d'entrée et de sortie étant fixées par le point de fonctionnement de la machine le squelette ne peut pas varier en tout cas au bord de fuite, l'écoulement du bord d'attaque, quant à lui, peut être fonction de la conjugaison du squelette et de l'épaisseur, le choix des solutions devenant dans cette zone-là beaucoup plus large.

Le développement de cette méthode nécessite la rapidité de mise en oeuvre, en effet une méthode de conception doit être vite exécutable car elle peut être répétée plusieurs fois lors de la réalisation d'un tracé d'aubage, à cet effet les méthodes de panneaux sont bien adaptées car elles évitent l'utilisation d'un maillage sophistiqué et permettent de contrôler les caractéristiques d'un aubage dans tout un domaine donné, alors que dans des méthodes aux éléments ou aux différences finis on doit préparer un maillage pour chaque incidence correspondant à un point de fonctionnement nous intéressant. Ces dernières méthodes conviennent par contre pour le contrôle de l'aubage terminé, au dernier stade de la conception et en quelques points critiques du domaine de fonctionnement. Une telle analyse comparée, sur le comportement cavitant d'un aubage, est présentée dans la référence [13].

I.2. Grille d'aubes

I.2.1. Grille d'aubes annulaire

I.2.1.1. Equation de l'écoulement quasi tri-dimensionnel

Une particule fluide s'écoulant dans un aubage qui tourne avec une vitesse de rotation ω est supposée se déplacer tout autour d'une surface de rayon $r(z)$, si de plus l'aubage considéré est axial, r est constant pour un z fixe et, après avoir déroulé l'intersection de la surface avec l'aubage, on peut étudier l'écoulement de la particule fluide dans une grille d'aubes droite.

Considérons tout d'abord l'écoulement dans un élément de surface de courant axisymétrique d'épaisseur variable, caractérisé par les vitesses absolues C_u et C_z (les vitesses relatives sont W_u et W_z où $W_u = C_u - \omega r$ et $W_z = C_z$). Cet écoulement est irrotationnel si la circulation Γ calculée autour d'un élément perpendiculaire à la surface de courant conique suivant la courbe C sur la Fig. I.2 est nulle :

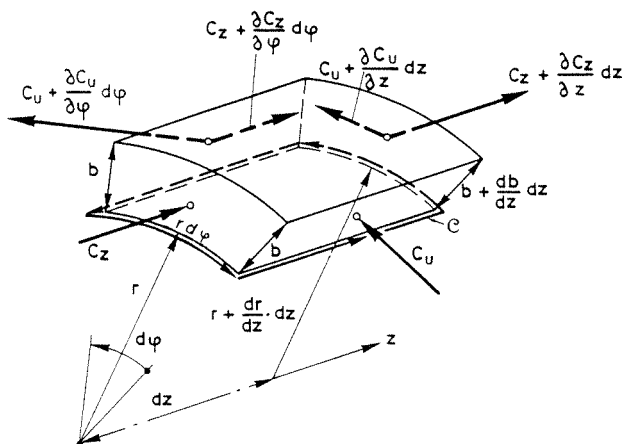


Fig. I.2 Surface de courant hélico-radiale

Sur le circuit fermé élémentaire C, la circulation est donnée par:

$$\begin{aligned} (C_z - \frac{1}{2} \frac{\partial C_z}{\partial \varphi} d\varphi) dz + (C_u + \frac{1}{2} \frac{\partial C_u}{\partial z} dz)(r + \frac{dr}{dz} dz) d\varphi - (C_z + \frac{1}{2} \frac{\partial C_z}{\partial \varphi} d\varphi) dz - (C_u - \frac{1}{2} \frac{\partial C_u}{\partial z} dz)r d\varphi \\ = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

compte tenu du fait que la composante radiale de la vitesse C_r n'y apporte pas de contribution, la loi de continuité appliquée au volume élémentaire V donne la relation suivante

$$\begin{aligned} C_z r b d\varphi - (C_z + \frac{\partial C_z}{\partial z} dz) (b + \frac{db}{dz} dz) (r + \frac{dr}{dz} dz) d\varphi + C_u (b + \frac{1}{2} \frac{db}{dz} dz) dz dz \\ - (C_u + \frac{\partial C_u}{\partial \varphi} d\varphi) (b + \frac{1}{2} \frac{db}{dz} dz) dz = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

selon l'hypothèse que le volume élémentaire est limité par deux surfaces de courant. En négligeant les termes d'ordre supérieur et après avoir introduit les vitesses relatives, on trouve les deux équations de l'écoulement liant la composante axiale W_z à la composante radiale W_u :

$$\frac{\partial W_u}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{r \partial \varphi} + (\frac{W_u}{r} + 2\omega) \frac{dr}{dz} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial W_z}{\partial z} + \frac{\partial W_u}{r \partial \varphi} + (\frac{dr}{rdz} + \frac{db}{b dz}) W_z = 0 \quad (4)$$

1.2.1.2. Déroulement de la grille

Dans le cas d'un écoulement axial, les variations de la largeur de la turbine élémentaire ainsi que celles du rayon r sont nulles, les équation (3) et (4) se ramènent à :

$$\frac{\partial W_z}{\partial z} + \frac{\partial W_u}{r \partial \varphi} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial W_u}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{r \partial \phi} = 0 \quad (6)$$

le déroulement du cylindre de rayon r sur un plan x,y conserve les angles :

$$r \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

et le système s'écrit, dans le plan xy , avec les vitesses W_x et W_y

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial W_x}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

la vitesse dans la grille d'aubes déroulée dérive d'un potentiel et on peut résoudre l'écoulement en cherchant un potentiel dans cette grille droite.

I.2.2. Grille droite

I.2.2.1. Transfert de quantité de mouvement dans une grille droite

Soit une grille caractérisée par un profil distribué jusqu'à l'infini, par le calage β_0 et le pas t , déterminé par le rapport du périmètre du cylindre sur le nombre d'aubes Z de la roue : $t = \frac{2\pi r}{Z}$.

Pour que l'écoulement calculé dans cette grille simule exactement l'effet de la turbine, il faut qu'un transfert de quantité de mouvement soit exercé entre l'amont et l'aval. D'après l'équation des moments cinétiques formulée par Euler, les vecteurs vitesses \mathbf{W}_1 et \mathbf{W}_2 calculés à l'infini de part et d'autre de la grille doivent différer d'un vecteur \mathbf{W}_Γ parallèle à l'axe de la grille, puisque le débit \dot{V} perpendiculaire à l'axe de la grille est conservé (voir annexe f). La force résultante exercée sur chaque profil de la grille est proportionnelle à \mathbf{W}_Γ .

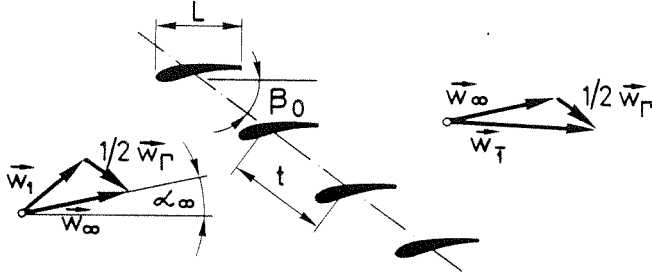


Fig. I.3 Caractéristiques de l'écoulement dans une grille d'aubes plane

On démontre que cette résultante est perpendiculaire au vecteur \vec{W}_∞ et le comportement de l'aubage sera d'autant meilleur que l'angle $\beta_\infty = \beta_0 + \alpha_\infty$ est proche de $\frac{\pi}{2}$, la résultante ayant une composante axiale nulle dans ce cas [14].

I.3. Problème aux limites et détermination du potentiel

I.3.1. Écoulement potentiel incompressible

Les équations de l'écoulement potentiel dans un fluide incompressible sont

$$\vec{W} = \nabla \Phi \quad (9)$$

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \vec{W} = 0 \quad (10)$$

Le champ \vec{W} dérivant d'un potentiel Φ , on peut aussi écrire :

$$\nabla \times \vec{W} = \nabla \times \nabla \Phi = 0 \quad (11)$$

Dans la partie qui suit, on présente la définition du potentiel Φ , restreint à deux cas bi-dimensionnels: l'écoulement autour d'un profil isolé ou dans une grille de profils. En appliquant tout d'abord la propriété de linéarité de la relation (10), on peut considérer le potentiel Φ comme un somme de fonction élémentaires f_i (principe de superposition) :

$$\Phi_{\Sigma} = \sum_i f_i \quad (12)$$

I.3.2. Détermination du potentiel

I.3.2.2. Cas du profil isolé

Soit un écoulement autour d'un profil isolé, on rencontre ici le cas classique du problème aux limites de Cauchy [15], à savoir que, à l'infini, l'écoulement homogène et parallèle n'est pas perturbé par la présence de l'obstacle-profil et la vitesse y prend alors une valeur constante W_{∞} . On compose le potentiel selon le principe de superposition:

$$\Phi = \Phi_0 + \sum_i f_i \quad (13)$$

où Φ_0 est le potentiel de l'écoulement homogène et parallèle.

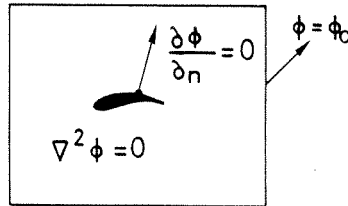


Fig. I.4 Problème de Cauchy

Sur le contour du profil, la vitesse est tangente, ce qui est exprimé en terme de potentiel par la relation:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi = \frac{\partial}{\partial n}(\Phi) = 0 \quad (14)$$

ce qui signifie qu'aucune particule fluide ne doit traverser le contour, on appelle cette condition la condition d'imperméabilité ou condition de glissement.

I.3.2.3. Grille droite infinie

L'extension de la grille droite influence l'écoulement général jusque dans ses limites, cette influence se manifeste par une déviation de la vitesse entre l'aval et l'amont. On parle d'écoulement infini amont (caractérisé par le vecteur vitesse \mathbf{W}_1) et l'écoulement infini aval (caractérisé par le vecteur vitesse \mathbf{W}_2). Sans oublier de mentionner que la déviation exercée par la grille $\mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_1 - \mathbf{W}_1^\perp$ est parallèle à l'axe de la grille pour des raisons de continuité [16]. La condition d'imperméabilité doit être satisfaite pour chaque profil de la grille, on parle alors de périodicité de la condition. Pour des raisons de commodité du calcul, on inclut ce caractère de périodicité dans les fonctions f_i décrivant le potentiel, de telle sorte qu'en donnant la condition d'imperméabilité sur un seul profil, elle se trouve remplie partout dans la grille.

Pour des raisons de symétrie des fonctions f_i , on résoud le potentiel Φ selon le même schéma que dans le cas du profil isolé, cela revient à dire que, à un potentiel Φ_0 dont le gradient est identique partout, on superpose le potentiel $\sum_i f_i$ de la grille dont les gradients à l'infini amont et aval ont une norme identique mais une direction opposée, cette norme étant égale à la moitié de la déviation \mathbf{W}_2 .

$$\Phi = \Phi_0 + \sum_i f_i \quad (15)$$

La vitesse induite par la grille à l'infini et perpendiculaire à son axe est nulle :

$$\mathbf{n}_g \cdot \nabla \left(\sum_i f_i(\pm\infty) \right) = 0 \quad (16a)$$

ou , exprimé d'une autre façon : $\frac{\partial \Phi}{\partial n_g} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial n_g} = \| W_\infty \| n_g$
(16b)

et on peut écrire :

$$W_1 = W_\infty + \nabla \left(\sum_i f_i (-\infty) \right) \quad (17a)$$

$$W_{\bar{1}} = W_\infty + \nabla \left(\sum_i f_i (+\infty) \right) \quad (17b)$$

ainsi, pour une grille et l'une des trois vitesses W_∞ , W_1 ou $W_{\bar{1}}$ données, alors les deux autres vitesses sont obtenues par les relations (17a) et (17b) après résolution du système incluant les conditions de glissement.

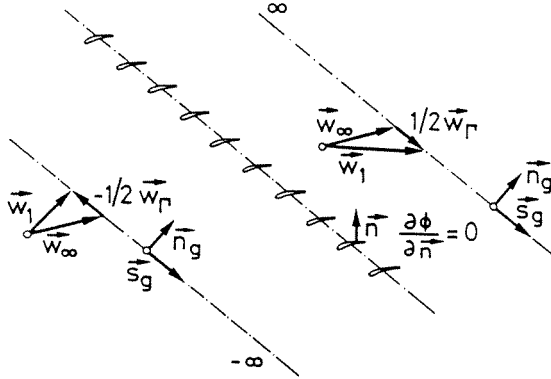


Fig. I.5 Problème aux limites dans un domaine partagé en deux demi plans par une grille

I.3.3. Discrétisation et résolution numérique

Le calcul de l'écoulement ainsi présenté dans une grille ou autour d'un profil isolé passe par la détermination des fonctions f_i . Soient n fonctions f_i combinées dans Φ : il faut alors construire un système contenant n conditions pour trouver ces n fonctions f_i dans le cas présent ce sont n conditions d'imperméabilité pour une série de points situés tout autour du profil, ces points doivent être choisis judicieusement pour que la résolution numérique s'effectue au mieux, il faut placer plus de points dans une zone à forte courbure, p. ex. au bord d'attaque, que vers le milieu du profil.

I.4. Distribution de singularités, fonctions élémentaires

Soit un écoulement bi-dimensionnel autour d'un ou plusieurs cylindres, on étudie cet écoulement dans un plan perpendiculaire à ces cylindres. Le domaine D d'écoulement, ainsi obtenu par l'exclusion des intersections S_i , est toujours constitué d'un seul morceau. Les courbes contenues dans D ne peuvent pas toutes dégénérer continument en un point [17] [18], on parle d'un domaine multiplement connexe.

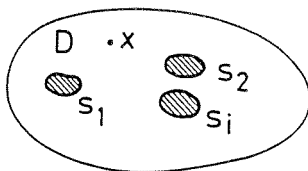


Fig. I.6 Domaine multiplement connexe

Dans un tel domaine, on peut résoudre un écoulement par une combinaison de solutions élémentaires de l'équation de Laplace: sources, puits, tourbillons ou dipôles situés sur des points ou des lignes droites ou courbes [19] (Annexe A). Dans le dernier cas, on parle de méthode des panneaux, qui consiste à distribuer des singularités sur des lignes situées soit sur la frontière soit à l'intérieur des domaines S_i . En général, on approche la frontière courbe par une suite de segments droits (polygones) voire quadratiques ou cubiques, sur lesquels on distribue les singularités (singularités sur la peau). Après avoir constitué les fonctions élémentaires f_i à partir des singularités, on les introduit dans les conditions

d'imperméabilité. Au milieu de chaque segment ou panneau de singularités est situé ce qu'on appelle un point de contrôle d'imperméabilité qui est indissociable du panneau, cette situation nous conduit à un caractère de liaison indissociable entre la frontière et les panneaux, car tout déplacement de la frontière exige un déplacement des panneaux. Examinons maintenant le cas de la distribution des singularités à l'intérieur des domaines S_i , le point de contrôle sur la peau X_i est situé à une distance ΔL du panneau proximal P_i , ce ΔL devient négligeable en face de la distance de ce même point de contrôle à un autre panneau P_j ($\Delta L = X_i - P_i \ll X_i - P_j$), mais n'est jamais nul, contrairement aux méthodes classiques de panneaux. On présente en annexe la méthode de déplacement des panneaux à l'intérieur du profil.

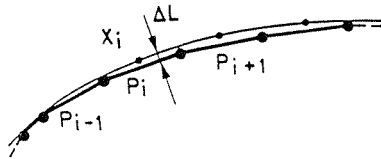


Fig. I.7 Distinction entre la paroi du profil et les singularités

Dans le cas de discontinuité dans les dérivées de la frontière, par exemple pour un profil tronqué, la distribution des panneaux n'est pas gênée et le polygone s'adapte à cette discontinuité. C'est cette situation qui sera choisi comme principe de la méthode développée ici et qui en fait l'originalité, car il permet de :

- optimiser la position des singularités pour une frontière fixe donnée (chapitre II)
- varier la position de la frontière en fonction de grandeurs physiques données comme pression ou vitesse. Cette seconde propriété correspond en fait à la résolution du problème inverse qui consiste à chercher une forme de profil à partir d'une répartition de pression (chapitre III et suivants).

En conclusion, on peut développer une méthode de calcul inverse basée sur une méthode bi-dimensionnelle de panneaux permettant une formulation simple du problème inverse en écoulement axial.

II. CALCUL DE L'ÉCOULEMENT

Il s'agit ici de présenter un mode de calcul direct d'écoulement en grille ou autour d'un profil isolé qui soit apte à servir de base pour l'établissement d'un calcul inverse. Nous allons, au cours de ce chapitre mettre en évidence les paramètres caractéristiques de cette méthode qui pourront s'avérer utiles dans le cadre de la résolution inverse.

II.1. PROFIL ISOLÉ

II.1.1. Distribution de singularités, vitesse complexe

On répartit une distribution de singularités $\sigma(z)dz$ (σ réel, dz complexe) sur un polygone intérieur au profil, la partie imaginaire de dz permettant de créer la portance. L'éloignement du polygone est proportionnel à l'épaisseur locale du profil. La répartition de cette densité choisie est linéaire sur chaque coté du polygone, la vitesse complexe (Annexe A) au point X s'écrit:

$$W(X) = V_x - iV_y = W_\infty e^{-i\alpha_\infty} + \frac{1}{2\pi} \sum_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{\sigma(z)}{X-z} dz \quad (1)$$

dans le plan où la vitesse extérieure est W_∞ , l'incidence α_∞ .

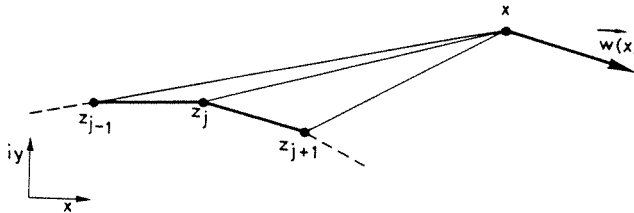


Fig. II.1 Influence des panneaux (z_j, z_{j-1}) et (z_j, z_{j+1}) sur X

chaque composante de la vitesse au point X est donnée par:

$$V_x(X) = W_\infty \cos(\alpha_\infty) + \sum_j B V_x(X, z_j, z_{j+1}, z_{j-1}) \sigma_j \quad (2)$$

$$V_y(X) = W_\infty \sin(\alpha_\infty) + \sum_j B V_y(X, z_j, z_{j+1}, z_{j-1}) \sigma_j \quad (3)$$

où les σ_j sont les valeurs, aux sommets du polygone, de la distribution de singularités [21].

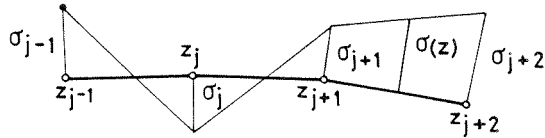


Fig. II.2 Distribution linéaire de singularités

Le calcul des coefficients BV_x et BV_y , appelés coefficients d'influence, est présenté en annexe B. Le coefficient $BV_{x_{ij}}$ représente l'influence de σ_j au point X_i sur la vitesse V_{x_i} . Dans la référence [21], un changement de repère est effectué pour chaque panneau, de telle sorte que le panneau considéré soit situé sur l'axe des x, ainsi l'intégration est faite le long de l'abscisse curviligne ($dL = dz = dx$), d'où la nécessité d'utiliser des singularités $i\gamma$ pour avoir une portance. Les coefficients d'influence subissent ensuite une rotation pour retourner dans le système original.

II.1.2. conditions de glissement , résolution du système linéaire

Pour trouver la valeur des inconnues σ_j , on écrit la condition de glissement, ou condition d'imperméabilité, en chaque point de contrôle X_i situé sur le profil. A chaque facette du polygone correspond un point de contrôle placé au plus près du milieu de la facette.

$$\frac{V_y(X_i)}{V_x(X_i)} = \tan(\alpha_i) \quad (4)$$

le second membre de (4) étant la dérivée $y'(x)$ aux point $X = x + iy$ du profil. On remplace (2) et (3) dans (4), ensuite, après avoir regroupé les termes contenant les inconnues σ_j , on obtient :

$$\sum_j (BVx_{ij} \operatorname{tg}(\alpha_i) - BVy_{ij}) \sigma_j = W_\infty (\sin(\alpha_\infty) - \operatorname{tg}(\alpha_i) \cos(\alpha_\infty)) \quad (5)$$

Le premier membre dépend uniquement de la géométrie du profil, quant au second, il dépend de la géométrie et de l'incidence. La matrice du système est donc indépendante de l'incidence. Nous verrons que ce n'est pas le cas, quand le profil est monté en veine.

II.1.3. Influence de la forme du bord de fuite, adaptation du nombre d'inconnues

On sait que la résolution potentielle de l'écoulement autour d'un profil est fortement dépendante des conditions que l'on fixe au bord de fuite et de la forme même de ce bord de fuite, on ne sait à priori jamais où se situe le point d'arrêt du bord de fuite, sauf dans les formes suivantes: le dièdre et le rebroussement, qui n'est d'ailleurs qu'un cas théorique. Pour les autres formes, un choix du point d'arrêt, même minutieusement étudié, conduit à des erreurs non négligeables [22], il faut envisager d'autres conditions laissant au système le degré de liberté nécessaire à sa résolution, tout en garantissant le non-contournement du bord de fuite, qui est le principe de la condition de Kutta-Jukowski.

Plusieurs cas sont à différencier, si on considère tout d'abord la situation des inconnues σ_j au bord de fuite, il faut exprimer des conditions particulières quant à la vitesse induite sur le bord de fuite. Cette vitesse est surtout influencée par les deux derniers panneaux de longueur a .

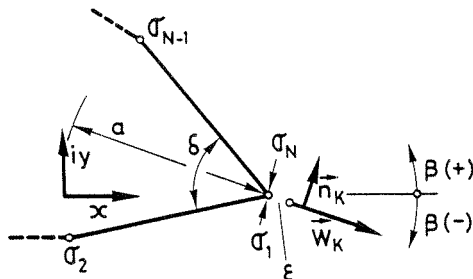


Fig. II.3. Représentation des deux derniers panneaux aux bord de fuite

Ainsi, en ne tenant compte que de l'influence des deux derniers panneaux dans la relation (1), la $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} W_K(a+\epsilon)$ est proportionnelle à l'expression :

$$[(\sigma_1 - \sigma_N e^{-i\delta}) \{1 + (1 - \frac{\epsilon}{a}) \log(\frac{\epsilon}{\epsilon-a})\} + (\sigma_2 - \sigma_{N-1} e^{-i\delta}) [1 - \frac{\epsilon}{a} (\log(\frac{\epsilon}{\epsilon-a}))]] e^{i((\delta/2) - \beta)}$$

où β est l'angle de la direction de la tangente au squelette. La condition nécessaire à cet endroit est que la vitesse soit de grandeur finie, or $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \text{Log} \epsilon = 0$ et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Log} \epsilon = \infty$, ainsi, on déduit que $\sigma_1 - \sigma_N = 0$ et $\sigma_1 + \sigma_N = 0$, donc la distribution de singularité atteint la valeur nulle de part et d'autre du bord de fuite, la condition de Kutta-Jukowski est remplie alors de façon implicite. Cette condition n'est en fait pas suffisante pour que la vitesse soit dirigée dans le sens du squelette.

Il faut alors introduire une condition supplémentaire pour que la vitesse au bord de fuite soit dirigée dans le plan bissecteur de ce même bord de fuite ou autrement dit dans la direction du squelette à cet endroit.

Sur un bord de fuite éfilé ou arrondi, bien que dans ce cas, le choix de la dernière facette soit arbitraire, on applique cette dernière condition de manière explicite dans le système de résolution en substituant aux conditions de glissement sur les deux dernières faces une seule condition sur la vitesse aval, on a donc $N-2$ conditions pour $N-2$ inconnues.

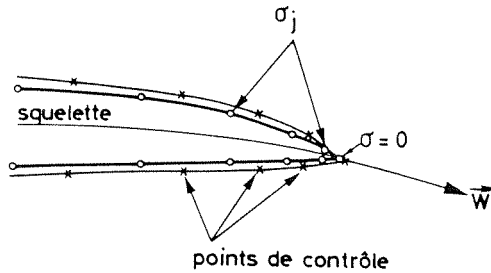


Fig. II.4 Aspect général des éléments au bord de fuite

Pour un bord de fuite tronqué, on ne sait pas quelle est la direction préférentielle de l'écoulement directement à l'aval du bord de fuite, on se propose de déplacer alors les points de contrôle des deux dernières faces dans le prolongement des épaisseurs intrados et extrados (Fig. II.5). Si D désigne l'épaisseur maximale du profil, ce schéma est valable pour autant que le segment de troncation du bord de fuite H reste bien inférieur à D ($H < D/5$). On assiste dans le cas contraire à un déséquilibre de la répartition des points de contrôle sur l'axe y au bord de fuite, dont résulte un défaut d'imperméabilité.

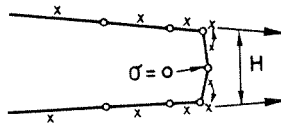
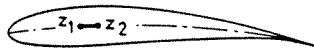


Fig. II.5 Déplacement des points de contrôle sur un bord de fuite tronqué

On a ici $N-1$ conditions et il faut compléter le système par une nouvelle inconnue, on distribue un doublet ou dipôle uniforme μ sur un petit segment du squelette, soit environ un centième de la facette la plus proche à l'endroit de la plus grande épaisseur:

Fig. II.6 Distribution du doublet μ

ce doublet génère dans le plan une vitesse qui s'additionne à celle générée par la distribution σ

$$W_{\mu}(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\mu \, dz}{(X-z)^2} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{z_2 - z_1}{(X - z_1)(X - z_2)} \quad (6)$$

Dans le cas du bord de fuite épais ou tronqué, il est nécessaire avant tout que le nombre de points de contrôle soit important dans la zone du bord de fuite, en général il faut aussi plus de points de contrôle dans les zones à fortes courbure (voir II.1.4.4.)

Si on impose une position du point d'arrêt, on remarque qu'un petit déplacement de celui-ci entraîne de grosses variations de la portance liées au croisement des courbes de pression avant le point d'arrêt [23], plus ce croisement est repoussé vers le point d'arrêt et moins son existence influe sur le résultat global, ce qui est possible en n'imposant pas de vitesse nulle au bord de fuite. A ce titre la figure II.7. illustre bien le phénomène sur un profil oignon tronqué à 90% dont le bord de fuite a été arrondi et dont l'épaisseur relative est 10%. L'équation de ce profil est la suivante: $y = y_{\max} \frac{16}{3\sqrt{3}} (1-x) \sqrt{x(1-x)}$ ($x_{\max} = .9$)

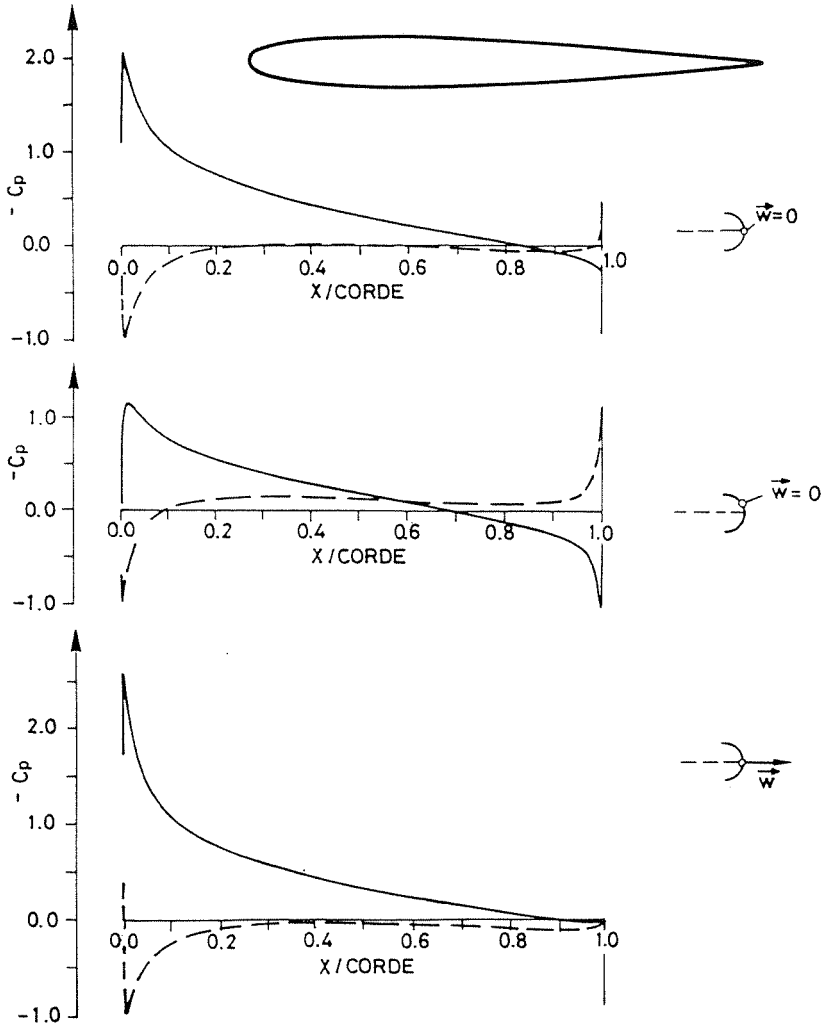
On a représenté le coefficient de pression C_p le long du profil, défini par la relation:

$$C_p = 1 - \frac{V_x^2 + V_y^2}{W_{\infty}^2}$$

dans le premier cas, on a imposé une vitesse nulle au point d'épaisseur nulle et on peut remarquer un croisement des courbes de pression au bord de fuite. Dans le deuxième cas, le point de vitesse nulle est situé à l'extrados, mais encore dans le premier pour-mille directement avant le bord fuite, on constate alors l'influence considérable d'un tel choix. Quant au troisième cas, il reprend le schéma de la figure II.4 où l'on n'impose que la direction de la vitesse au bord de fuite, ce qui conduit à une répartition de pression plus favorable.

Pour un bord de fuite tronqué, cet effet peut devenir exagéré d'autant plus que le contournement de coins tend vers des vitesses infinies. C'est pourquoi on a préféré adapter le schéma de la figure II.5. qui correspondra plus à la réalité mais contribuera à l'augmentation de la traînée, voir II.1.4.

Fig. II.7. Essai de différentes conditions de Kutta-Joukowski explicites sur un profil de type oignon au bord de fuite arrondi (incidence 4°).



II.1.4. Calcul analytique de la portance et de la trainée

II.1.4.1. Contribution de la distribution σdz sur la portance

La relation de Blasius-Tchaplyguine [15],[20] nous permet de relier directement les composantes de Lilienthal F_T et F_N de la force , exercée par le fluide sur l'obstacle. Dans le cas où les singularités présentes sont contenues dans l'obstacle, on ne conserve dans cette relation que les termes dont le résidu est non nul :

$$F_T - i F_N = i \frac{\rho}{2} \oint W^2 dX = i \rho W_\infty e^{-i\alpha_\infty} \oint \sum_j \frac{1}{2\pi} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{\sigma(z) dz}{X-z} dX \quad (7)$$

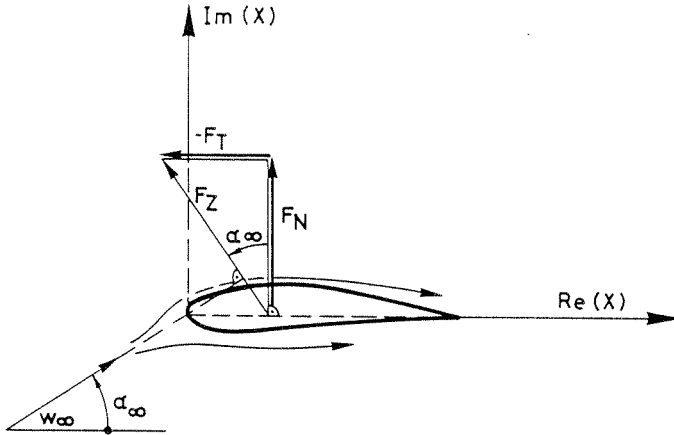


Fig. II.8 Composantes de Lilienthal de la portance en écoulement potentiel.

Si on calcule cette intégrale le long d'un circuit fermé entourant le profil avec $X-z = r(\varphi)e^{i\varphi}$,

alors la différentielle $dX = \frac{d(re^{i\varphi})}{d\varphi} d\varphi$ et on intègre de 0 à 2π pour un z fixe

$$\oint \sum_j \frac{1}{2\pi} \left[\int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{\sigma(z) dz}{X-z} \right] dX = \oint \left[\sum_j \frac{1}{2\pi} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \sigma(z) dz \right] \frac{d(re^{i\varphi})}{d\varphi} \frac{d\varphi}{re^{i\varphi}} =$$

$$\log\left(\frac{re^{i2\pi}}{r}\right) \sum_j \frac{1}{2\pi} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \sigma(z) dz = i \sum_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} \sigma(z) dz \quad (8)$$

cette dernière intégrale, calculée sur un segment z_j - z_{j+1} a pour résultat :

$$\frac{1}{2} (\sigma_{j+1} z_{j+1} - \sigma_{j+1} z_j + \sigma_j z_{j+1} - \sigma_j z_j)$$

et si le polygone est fermé

$$i \sum_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} \sigma(z) dz = \frac{1}{2} i \sum_j \sigma_j (z_{j+1} - z_{j-1}) \quad (9)$$

et après avoir introduit cette relation dans (7) , on obtient la relation

$$F_T - iF_N = -\frac{1}{2} \rho W_\infty e^{-i\alpha_\infty} \sum_j \sigma_j (z_{j+1} - z_{j-1})$$

Si on introduit ensuite les forces de portance F_z et de traînée F_x relatives au repère lié à W_∞ , il vient :

$$F_x = F_T \cos(\alpha_\infty) + F_N \sin(\alpha_\infty)$$

$$F_z = F_N \cos(\alpha_\infty) - F_T \sin(\alpha_\infty)$$

On peut rappeler que la traînée est nulle dans un écoulement potentiel. En introduisant maintenant les coefficients de traînée C_x ou de portance C_z

$$C_z = \frac{F_z}{\frac{1}{2} \rho W_\infty^2 L} \quad (10a)$$

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho W_\infty^2 L} \quad (10b)$$

avec $W_\infty = 1, L = 1$:

$$C_x = - \sum_j \sigma_j (x_{j+1} - x_{j-1}) \quad (11)$$

$$C_z = \sum_j \sigma_j (y_{j+1} - y_{j-1}) \quad (12)$$

comme les coefficients C_x et C_z sont indépendants du système d'axe choisi, les combinaisons linéaires (11) et (12) doivent être des invariants pour tout changement de repère. On discutera de l'utilité de la relation (11) en II.1.4.3.

II.1.4.2. Effet du doublet sur les forces

Comme précédemment, on applique la relation de Blasius-Tchaplyguine pour calculer l'effet du doublet μ uniformément distribué sur les forces résultantes, ne gardant ici que le terme susceptible d'avoir un résidu différent de zéro:

$$F_T - iF_N = i \frac{1}{2} \rho W_\infty e^{-i\alpha_\infty} \frac{1}{2\pi} \oint_{z_1}^{z_2} \int \frac{\mu dz}{(X-z)^2} dX \quad (13)$$

si on calcule tout d'abord l'intégrale le long du segment z_1, z_2

$$F_T - iF_N = i \rho W_\infty e^{-i\alpha_\infty} \frac{1}{2\pi} \mu \oint \left[\frac{1}{X-z_2} - \frac{1}{X-z_1} \right] dX$$

finallement, on obtient:

$$F_T - iF_N = i \rho W_\infty e^{-i\alpha_\infty} \frac{\mu}{2\pi} [\log(X-z_2) - \log(X-z_1)] \Big|_{X=r}^{X=re^{i2\pi}} = 0 \quad (14)$$

La contribution d'une distribution de dipôles, uniformément répartie, sur la force résultante est nulle [15].

II.1.4.3. Comparaison des forces intégrées avec les forces analytiques

La comparaison des forces obtenues par l'intégration des pressions et des forces calculés par la relation de Blasius-Tchaplyguine nous amène à faire les constatations suivantes: la correspondance entre le C_z intégré et le C_z analytique est toujours bonne: $0(\Delta C_z/C_z) = 5 \cdot 10^{-3}$. Avec la relation (11), on dispose d'un excellent moyen de contrôle de la résolution du système, comme il s'agit d'une somme obtenue par une méthode numérique, il est clair que la valeur $C_x=0$ ne peut pas être exactement atteinte. Par contre la différence en valeur relative entre C_x obtenu par l'intégration des coefficients de pression et C_x analytique n'est pas négligeable, l'ordre de grandeur du C_x intégré (en système normé unitaire $L=1, W_\infty=1$) est de 10^{-4} à 10^{-3} , il en va de même pour le C_x analytique. Pour un profil tronqué, ces grandeurs sont souvent 10 fois plus grandes, ceci est notamment dû au fait que l'on n'impose aucune condition le long du segment de troncation alors qu'il peut représenter une partie non-négligeable de l'épaisseur, ainsi les grandeurs intégrées sont assez approximatives, d'autant plus que les facettes du polygone des singularités sont irrégulières à cet endroit, ce qui représente une source d'erreurs pour les grandeurs analytiques.

On peut remarquer, dans la résolution de gros systèmes linéaires, qu'une condition donnée sur la valeur d'une grandeur physique par ex. $W(X_i) = 0$ est très contraignante pour ce système, en général de telles conditions ne sont pas nécessaires à la bonne résolution du système, en effet dans l'écoulement normé ($L=1, W_\infty=1$) on trouve des traînées résiduelles numériques intégrées de l'ordre de grandeur 10^{-4} à 10^{-3} , ce qui est tout à fait satisfaisant. Toutes les conditions qui forment le système à résoudre sont des conditions sur les rapports entre des grandeurs physiques et si l'on pose alors des valeurs de grandeurs physiques comme condition, le système perd un degré de liberté et les valeurs obtenues ont tendances à diverger ou osciller autour de la solution. Ainsi, introduire la condition $C_x=0$ pour assurer l'imperméabilité du profil conduit à un déséquilibre entre le C_x analytique (10^{-15}) et le C_x intégré (10^{-1}), il est préférable d'utiliser alors le calcul du C_x analytique comme contrôle ultérieur de la validité de la méthode. C'est pourquoi il est intéressant de présenter les valeurs de C_x intégré et de C_x analytique dans les exemples.

II.1.4.4. Influence de la répartition des points de contrôle sur les forces

Pour assurer une bonne résolution du système il faut concentrer les points dans les zones de forte courbure telles que le bord d'attaque ou le bord de fuite. L'ordonnancement des abscisses, dans les calculs effectués, est réalisé au moyen de la projection sur l'axe des x des rayons $L/2$ disposés tous les p degrés ($p = \frac{180}{\text{Nombre de points}}$), ce qui permet de concentrer les points aux deux extrémités.

Sur la figure II.9 est présentée une répartition en cosinus, on verra plus loin les effets d'une répartition en \cos^n , n étant inférieur ou égal à 1.

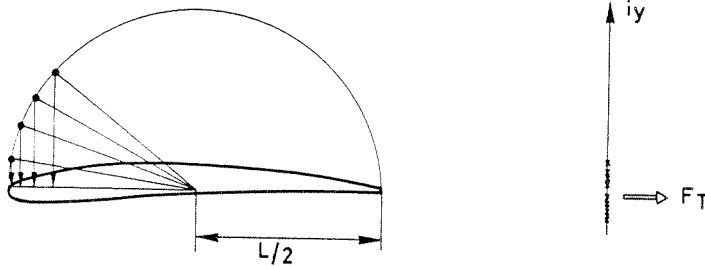
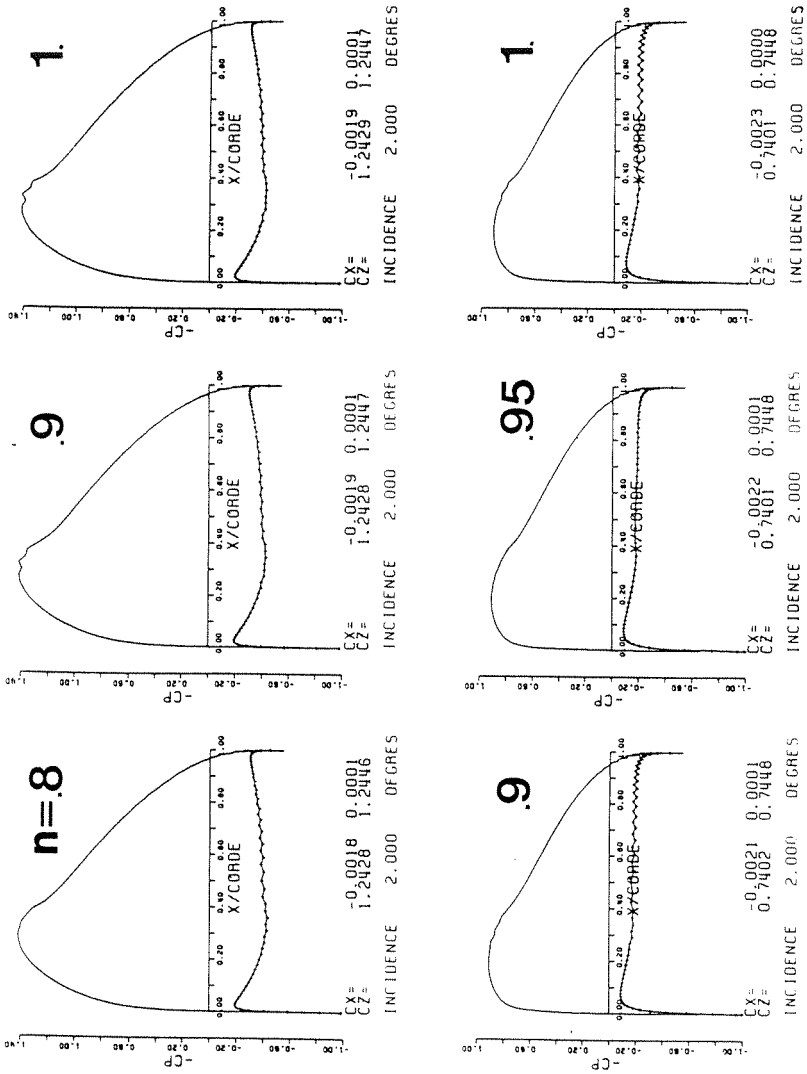


Fig. II.9. Distribution en cosinus des points de contrôle

On remarque que la projection des points sur l'axe des y est caractérisée alors par une concentration excessive vers la zone d'épaisseur maximale, surtout pour les profils minces. Ainsi, le calcul de la force tangente F_T , dans l'axe de la corde, peut se révéler imprécis, surtout en présence d'un grand pic de dépression au niveau du nez où la concentration des points est faible, cela influencera surtout le calcul du C_x intégré, qui est proportionnel à $F_T \cos \alpha$.

Le figure II.10 représente des répartitions de pression calculées sur des profils NACA 8410 et NACA 4410 pour différentes valeurs de l'exposant n du cosinus, coefficient de concentration des points. La première valeur du C_x ou C_z est la valeur intégrée et la seconde la valeur obtenue par les relation (11) ou (12). L'influence locale du dipôle est visible à 30% de la corde. La valeur de C_z n'est pas influencée par n , en conséquence, un filtrage des oscillations est permis afin d'obtenir une distribution continue de pression.

Fig. II.10 Influence de l'exposant n sur la distribution de pression
pour les profils NACA 8410 et 4410



II.1.5.1. Contrôle de l'imperméabilité par un calcul de débit

Le débit engendré par la vitesse W_∞ sur une surface quelconque entourant le profil est nul, mais nous devons déterminer la condition que les singularités doivent remplir pour que le débit qu'elles engendrent soit nul. On veut vérifier ainsi si les conditions d'imperméabilité données à la surface sont suffisantes. La vitesse induite par les singularités s'écrit :

$$W(X) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\sigma(z) dz}{X - z} \quad (15)$$

considérons le terme induit par le segment z_j, z_{j+1}

$$\Delta W_j(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{\sigma(z) dz}{(X-z)} \quad (15 \text{ bis})$$

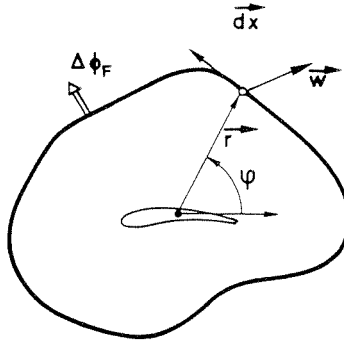


Fig. II.11 Calcul du débit induit autour du profil

Le débit de la vitesse ΔW_j à travers la surface délimitée par le circuit entourant le profil est :

$$\Delta \Phi_{Fj} = \oint \left| \Delta W_j \right| dX \left| \sin(\arg(\Delta W_j) - \arg(dX)) \right| \quad (16)$$

la vitesse complexe étant déjà le conjugué de la vitesse effective, on peut écrire:

$$\Delta\Phi_{Fj} = \text{Im} \left[\oint \Delta W_j dX \right] \quad (18)$$

En introduisant en coordonnées polaires $X - z = re^{i\varphi}$, le vecteur complexe suivant le circuit est

$$dX = \frac{d(re^{i\varphi})}{d\varphi} d\varphi$$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{Fj} &= \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left[\oint_{z_j}^{z_{j+1}} \sigma(z) dz \right] \frac{d(re^{i\varphi})}{d\varphi} \frac{d\varphi}{re^{i\varphi}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left[\int_{z_j}^{z_{j+1}} \sigma(z) dz \right] \text{Log} \left(\frac{re^{i2\pi}}{r} \right) = \text{Im} \left[\int_{z_j}^{z_{j+1}} i\sigma(z) dz \right] \end{aligned} \quad (18)$$

on effectue la somme de tous les éléments $\Delta\Phi_{Fj}$ qui doit être nulle:

$$\Phi_F = \text{Im} \left[\sum_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} i\sigma(z) dz \right] = 0 \quad (19)$$

$$\Phi_F = \frac{1}{2} \sum_j (\sigma_{j+1} - \sigma_j) (x_{j+1} - x_j) = 0 \quad (20)$$

et si le polygone est fermé:

$$\Phi_F = \frac{1}{2} \sum_j \sigma_j (x_{j+1} - x_{j-1}) = 0 \quad (21)$$

la condition selon laquelle le débit est nul est identique à celle de la traînée F_x nulle :

$$\Phi_F = 0 = F_x = 0$$

II.1.5.2. Calcul de la circulation

La circulation Γ autour d'un profil est l'intégrale le long d'un circuit fermé entourant le profil de la projection de la vitesse sur ce circuit :

$$\Gamma = \oint \mathbf{W} \cdot d\mathbf{L} \quad (22)$$

en notation complexe, la circulation induite par l'élément j est :

$$\Delta\Gamma_j = \operatorname{Re}[\oint \Delta W_j \cdot dX] \quad (23)$$

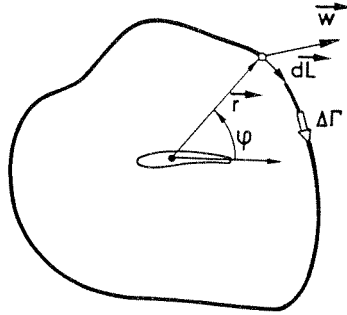


Fig. II.12 Calcul de la circulation autour du profil

la circulation positive est définie dans le sens des aiguilles d'une montre , si on calcule cette circulation le long du circuit entourant le profil , alors $dL = -\frac{d(\operatorname{re}^{i\varphi})}{d\varphi} d\varphi$:

$$\Delta\Gamma_j = \text{Re}\left[\frac{1}{2\pi} \oint \sigma(z) dz \frac{d(re^{i\varphi})}{d\varphi} \frac{d\varphi}{re^{i\varphi}}\right] = \text{Re}\left[\frac{1}{2\pi} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \sigma(z) dz (-1) \text{Log}\left(\frac{re^{i2\pi}}{r}\right)\right]$$

et la circulation totale devient:

$$\Gamma = \text{Im}\left[\sum_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} \sigma(z) dz\right] = \frac{1}{2} \sum_j (\sigma_{j+1} - \sigma_j) (y_{j+1} - y_j) \quad (24)$$

Cette circulation permet d'obtenir la portance exercée sur le profil, avec un polygone de singularité fermé:

$$F_z = \rho \Gamma W_\infty = \frac{1}{2} \rho W_\infty \sum_j \sigma_j (y_{j+1} - y_{j-1}) \quad (25)$$

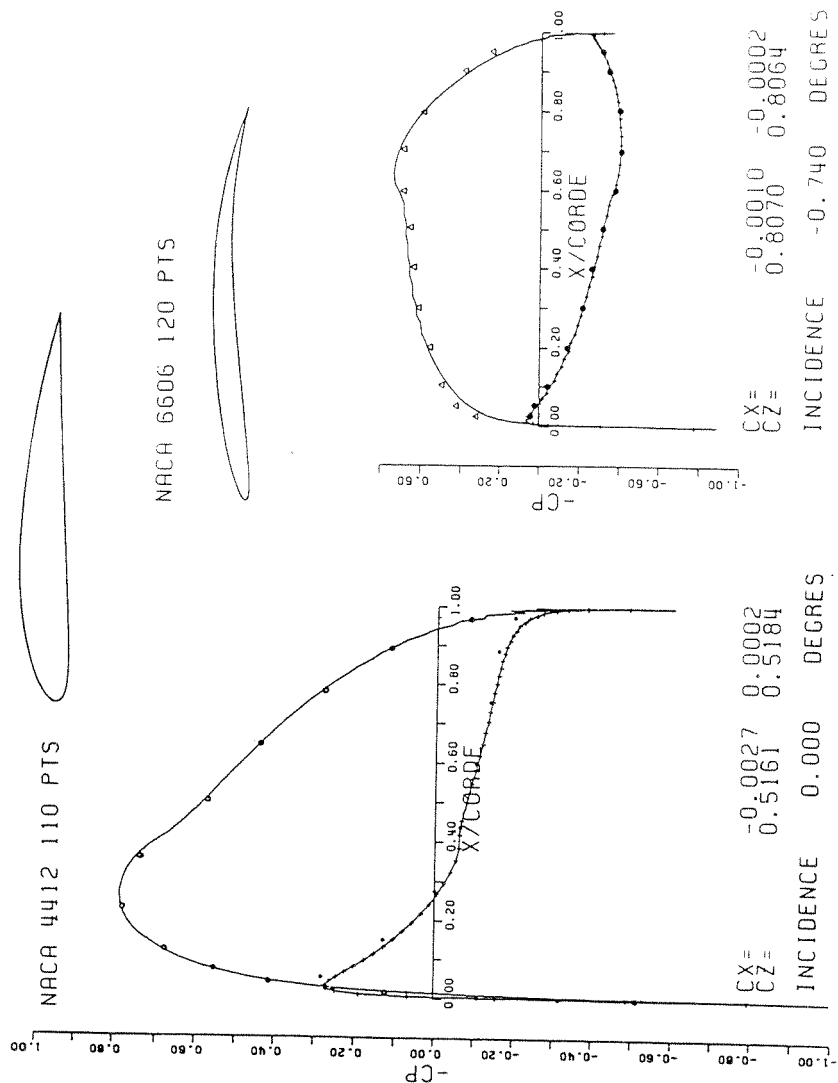
et on retrouve le C_z ($W_\infty = 1$):

$$C_z = \frac{F_z}{\frac{1}{2} \rho W_\infty^2} = \sum_j \sigma_j (y_{j+1} - y_{j-1}) \quad (26)$$

II.1.6. comparaisons avec d'autres méthodes

La figure II.14. présente une comparaison du calcul de panneaux (courbe continue) avec la méthode de transformation conforme de la référence [26] (valeurs indiquées par un symbole), table 11.4 pour le profil 4412. Cette même figure II.14 montre une autre comparaison avec la méthode présentée en [27] sur un profil 6606 (valeurs indiquées par un symbole). Les différences entre les résultats s'expliquent en grande partie par le fait que la résolution numérique est très sensible à la discrétisation et au calcul des dérivées du profil, même avec une petite variation de l'ordre du pour mille, puisque la transformation conforme ne donne pas un profil absolument identique au profil NACA. Ces petites variations provoquent des écarts particulièrement remarquables dans les zones à forts gradients de pression.

Fig. II.14 Comparaison de la méthode présente (courbe continue) avec des calculs analytiques (symboles)



II.1.7. Instabilités

Des problèmes d'instabilité peuvent apparaître, notamment sur un bord de fuite d'épaisseur symétrique avec ou sans squelette. En effet on remarque que

- La valeur des singularités oscille à proximité du bord de fuite et la valeur des vitesses oscille sur une plus petite distance, on peut en déduire que les coefficients d'influence ont un effet amortisseur.

- La répartition des singularités tend vers des valeurs opposées sur les deux dernières faces, soit: $\sigma_2 = a$, $\sigma_3 = b$, $\sigma_{N-2} = -b$, $\sigma_{N-1} = -a$

Le fait de forcer la distribution à s'annuler au bord de fuite provoque donc un déséquilibre qui va produire ces oscillations.

La déduction principale qui peut en être faite est que la condition présentée en II.1.3. est trop forte, car il n'est pas garanti que la ligne de courant passe au sommet (z_1/z_N) du polygone , puisque ce polygone est éloigné de la surface du profil, même si cet éloignement est proportionnel à l'épaisseur, qui dans le cas du profil au bord de fuite dièdre tend vers une épaisseur nulle, d'autre part, la polygonisation ne garantit pas l'obtention de 2 facettes de même longueur de part et d'autre du bord de fuite, ce qui rend trop forte la condition sur les singularités.

Afin de pallier à cette oscillation, on impose des valeurs non-nulles de distribution au sommet z_1/z_N , ainsi le gradient de la distribution s'en trouve considérablement réduit: $\sigma_1 = -\sigma_{N-1}$, $\sigma_N = -\sigma_2$.

Les résultats de cet essai montrent que les oscillations des singularités diminuent en amplitude, en outre elles ne se déroulent plus que sur 15 panneaux au lieu de 25 panneaux sur chaque face à incidence nulle pour un total de 150 panneaux. On peut remarquer cet effet sur la figure II.15, où la distribution à incidence nulle sur les dix derniers panneaux intrados du bord de fuite a été représentée. D'autre part, la distribution est constante sur le dernier panneau, ($\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_{N-1} = -\sigma_N$).

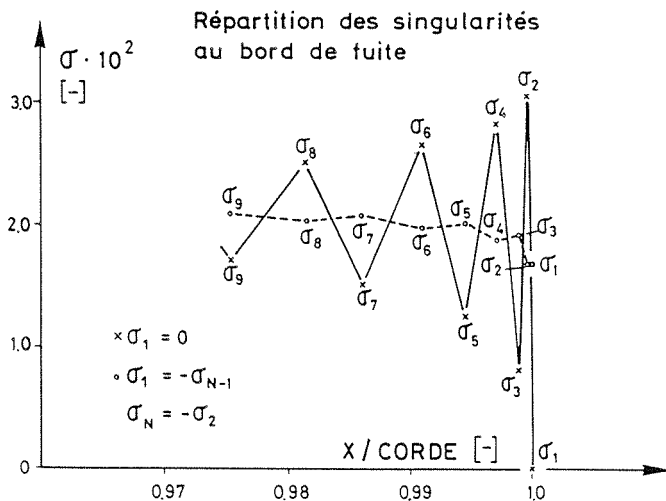


Fig. II.15

L'augmentation de l'incidence tend à augmenter la différence en valeur absolue entre σ_1 et σ_N , et parallèlement l'oscillation des singularités n'apparaît plus que sur le dernier panneau de chaque face. Quant à l'oscillation des vitesses, elle a disparu (voir figure II.16 page suivante).

Cette transformation des conditions au bord de fuite a filtré les variations de vitesse sur le bord de fuite tout en conservant des valeurs identiques des grandeurs intégrées et quasi analytiques C_x et C_z .

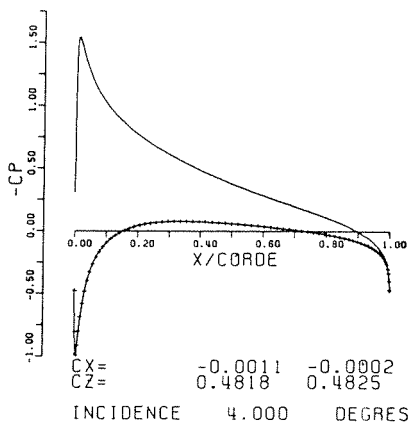
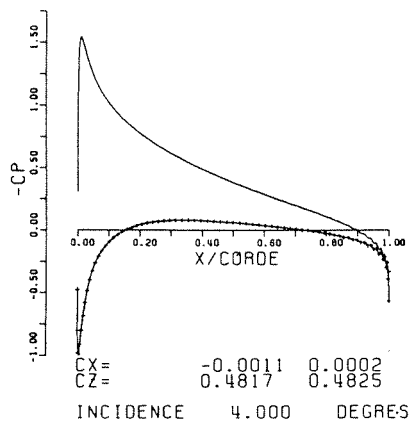
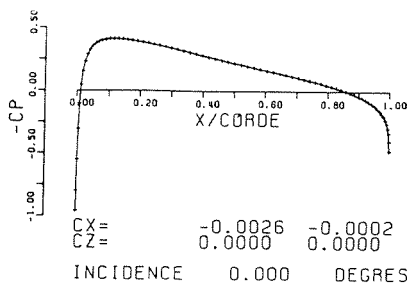
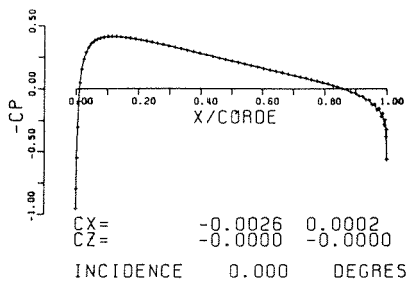
Lors de certaines applications à des profils possédant un bord de fuite tronqué ou de forme compliquée, cet artifice ne suffit plus à amortir les oscillations de vitesse, il faut procéder alors à un lissage des vitesses après la résolution du système, qui n'affecte que très légèrement les grandeurs intégrées. On a préféré cette solution au lissage des singularités après résolution, qui provoquerait une erreur plus grande entre les grandeurs intégrées et les grandeurs quasi analytiques. On verra plus tard que ces oscillations ne perturbent pas non plus le calcul inverse, car les coefficients d'influence ont un effet amortisseur.

Fig. II. 16 Influence de la condition implicite sur les oscillations

NACA 0012, 150 pts

$$\sigma_1 = 0, \sigma_N = 0$$

$$\sigma_1 = -\sigma_{N-1}, \sigma_N = -\sigma_2$$



II.2. Grille droite

II.2.1. Distribution de singularités dans la grille

On obtient le potentiel de l'écoulement par superposition et on assure sa périodicité en distribuant des singularités identiques sur chaque profil. En notation complexe le vecteur qui caractérise la position relative de 2 aubes consécutives est

$$z_{\text{inter}} = te^{-i\beta_0} \quad (27)$$

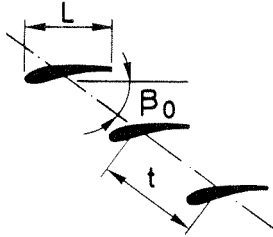


Fig. II.17 Définition du pas dans le plan de Cauchy

pour calculer la vitesse en un point X , on effectue la somme de l'influence de l'écoulement général et de tous les profils de la grille [24],[25]:

$$W(X) = W_{\infty} e^{-i\alpha_{\infty}} + \frac{1}{2\pi} \sum_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} \sigma(z) \sum_{N=-\infty}^{N=\infty} \frac{1}{X-z-Nz_{\text{inter}}} dz \quad (28)$$

La distribution σ étant identique sur chaque profil, $\sigma(z) = \sigma(z + Nz_{\text{inter}})$.

On résout ensuite cette somme de $N=-\infty$ à $N=\infty$, voir le principe en annexe C

$$W(X) = W_{\infty} e^{-i \alpha_{\infty}} + \frac{1}{2z_{\text{inter}}} \sum_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} \sigma(z) \cotg\left(\frac{\pi(X-z)}{z_{\text{inter}}}\right) dz \quad (29)$$

On décompose la relation (29) pour obtenir Vx_i et Vy_i , selon des relations similaires aux relations (2) et (3), les coefficients BVx_{ij} et BVy_{ij} étant différents. Le calcul des coefficients d'influence peut être réalisé analytiquement, mais le problème suivant se pose : le terme $zcotg\left(\frac{\pi(X-z)}{z_{\text{inter}}}\right)$ peut être exprimé au moyen d'une série dont les termes convergent rapidement vers zéro pour des petites valeurs de $\frac{X-z}{z_{\text{inter}}}$. Par contre, dès que ce module dépasse 0.5, on atteint la première asymptote de la fonction à intégrer et le nombre d'éléments de la série à prendre en compte devient tel qu'une intégration analytique ne représente plus aucun avantage par rapport à une intégration numérique. On envisage donc pour une valeur $\left\| \frac{X-z}{z_{\text{inter}}} \right\| > \pi$ de passer de l'intégration analytique à l'intégration numérique, mais le caractère hybride de cette méthode rend les coefficients inhomogènes, ce qui est néfaste à la résolution, c'est pourquoi on a choisi de calculer directement tous les coefficients numériquement par la méthode de Simpson (voir en annexe D).

Dès que le module $\left\| X_i - \frac{1}{2}(z_j + z_{j+1}) \right\| > .025$ (la corde $L=1$), on n'utilise plus que 3 points d'appuis dans l'intégration numérique par la méthode de Simpson ($z_j, \frac{1}{2}(z_j + z_{j+1}), z_{j+1}$), d'où un net gain de temps par rapport à une solution analytique exprimée sous forme de série.

II.2.2. Conditions de glissement, résolution du système linéaire

Après avoir calculé les coefficients d'influence, on introduit ceux-ci dans un système linéaire identique au système décrit en II.1.2. où la matrice contient les caractéristiques du profil constituant la grille ainsi que du pas z_{inter} et du calage β_0 , il suffit d'introduire dans le second membre les conditions de glissement sur un profil pour résoudre l'écoulement dans toute la grille, étant donné la périodicité de la fonction cotangente.

II.2.3. Influence du bord de fuite, adaptation des inconnues

Les remarques concernant la condition de Kutta sont identiques à celles décrites sous II.1.3. La direction prise par l'écoulement directement en aval du bord de fuite étant encore plus

incertaine que dans le cas du profil isolé, puisque la vitesse infini aval diffère de la vitesse infini amont. De même, si les conditions l'exigent, il faudra compléter le schéma de résolution par l'adjonction d'une distribution constante de dipôles sur un segment du squelette de tous les profils de la grille, de telle sorte que la vitesse supplémentaire induite par cette distribution s'écrive:

$$W\mu(X) = \frac{\mu}{2\pi z_{\text{inter}}} \int_{z_1}^{z_2} \pi^2 \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{\pi(X-z)}{z_{\text{inter}}} \right) dz \quad (30)$$

et l'intégration sur ce segment z_1, z_2 a pour résultat :

$$W\mu(X) = \pi^2 \frac{\mu}{2z_{\text{inter}}} \left(\cotg\left(\frac{\pi(X-z_2)}{z_{\text{inter}}}\right) - \cotg\left(\frac{\pi(X-z_1)}{z_{\text{inter}}}\right) \right) \quad (31)$$

La valeur de cette vitesse à l'infini amont ou aval est nulle.

II.2.4. Calcul analytique des forces sur un profil en grille

II.2.4.1. contribution des sources

Pour calculer les forces exercées sur un profil en grille, on applique la relation de Blasius-Tchaplyguine en intégrant le long d'un parcours incluant un profil

$$\begin{aligned} F_T - iF_N &= \frac{1}{2} i\rho \oint W^2 dX = \\ &= \frac{1}{2} i\rho \oint \left[W_\infty e^{-i\alpha_\infty} + \frac{1}{2z_{\text{inter}}} \sum_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} \sigma(z) \cotg\left(\frac{\pi(X-z)}{z_{\text{inter}}}\right) dz \right]^2 dX \end{aligned} \quad (32)$$

Seul le double produit du terme contenant la vitesse incidente et du terme contenant l'influence des sources apporte une contribution à la force.

Le développement en série de la fonction $\cotg(x)$ a pour résultat : $\frac{1}{x} + (\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{x^5}{945} \dots)$

le résidu est donc 1 et l'intégrale devient :

$$\frac{z_{inter}}{\pi} \oint \sum_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{\sigma(z)}{(X-z)} dz dX = i 2 \cdot z_{inter} \sum_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} \sigma(z) dz \quad (33)$$

et les forces s'écrivent :

$$F_T - iF_N = -\rho W_\infty e^{-i\alpha_\infty} \sum_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} \sigma(z) dz \quad (34)$$

ce qui conduit au même résultat que dans le cas du profil isolé:

$$C_x = - \sum_j \sigma_j (x_{j+1} - x_{j-1}) \quad (35a)$$

$$C_z = \sum_j \sigma_j (y_{j+1} - y_{j-1}) \quad (35b)$$

II.2.4.2. Contribution du doublet

Si une partie de la vitesse est générée par le doublet μ uniformément réparti, le terme de W^2 susceptible d'avoir un résidu non nul est le double produit de la vitesse incidente et de la vitesse issue du doublet:

$$F_{T\mu} - iF_{N\mu} = -\rho W_\infty e^{-i\alpha_\infty} \frac{1}{z_{inter}} \oint \mu \cotg\left(\frac{\pi(X-z)}{z_{inter}}\right) dX \Big|_{z_1}^{z_2} \quad (36)$$

On ne conserve que le résidu de la cotangente

$$F_{T\mu} - iF_{N\mu} = \frac{1}{2} \rho W_\infty e^{-i\alpha_\infty} \frac{\mu}{\pi} \oint \frac{1}{X-z} dX \Big|_{z_1}^{z_2} = 0 \quad (37)$$

La contribution à la force d'un doublet uniformément réparti est nulle.

II.2.5. Calcul de la portance à partir de la loi d'Euler

La vitesse à l'infini est calculée au point $X = \lim_{(A \rightarrow \infty)} A z_{\text{inter}}$, $\Re \exists A$, ainsi $\lim_{(A \rightarrow \infty)} \cotg\left(\frac{\pi(iA z_{\text{inter}} - z)}{z_{\text{inter}}}\right) = i$

$$W_{\text{inf}} = \frac{i}{z_{\text{inter}}} \oint \sigma(z) dz \quad (38)$$

La composante perpendiculaire à l'axe de la grille est déterminée par la partie réelle de l'intégrale ci-dessus

$$\| W_{\text{inf}} \perp \| = \sum_j \frac{(x_{j+1} - x_{j-1}) \sigma_j}{4 \| z_{\text{inter}} \|} = 0 \quad (39)$$

La conservation du débit correspond bien, comme dans le cas du profil isolé, à la condition $\sum_j (x_{j+1} - x_{j-1}) \sigma_j = 0$ qui est par ailleurs identique à la condition de la traînée nulle.

La composante parallèle à l'axe de la grille caractérisant la déviation W_{Γ}

$$\| W_{\text{inf}} \parallel \| = \sum_j \frac{(y_{j+1} - y_{j-1}) \sigma_j}{4 \| z_{\text{inter}} \|} = \quad (40)$$

Si on exprime la puissance disponible sur le filet en fonction de la portance, en négligeant les pertes (voir annexe e) :

$$\rho g H = \frac{1}{2} \rho \dot{V} C_z W_{\infty} U \frac{L}{t} \quad (41)$$

$$\frac{L}{t} = \frac{1}{\| z_{\text{inter}} \|}$$

on compare ce résultat avec celui de la loi d'Euler qui lie l'échange de puissance à la déviation:

$$\rho \dot{V} g H = \rho \dot{V} (C_{u1} - C_{u\Gamma}) U$$

en grille droite $Cu_1 - Cu_1^- = Wu_1 - Wu_1^- = 2 \| \mathbf{W}_{inf} \|$ et avec $W_\infty = 1$

$$Cz = 4 t/L \frac{\| \mathbf{W}_{inf} \|}{W_\infty} = \sum_j (y_{j+1} - y_{j-1}) \sigma_j \quad (42)$$

la loi d'Euler confirme la relation pour la portance obtenue en II.2.4.

II.2.6. comparaisons

La figure II.18 présente un calcul d'écoulement en grille de profils NACA 8410, le pas étant .545 et le calage β_0 : 68.35 °. Les valeurs discrètes de comparaison (avec symboles) ont été calculées dans un maillage déterminé au moyen d'une interpolation transfinie dans lequel on résout les équation d'Euler. Ce calcul a été établi par le groupe numérique de l'IMHEF, dans ce dernier cas, le bord de fuite est arrondi, ce qui explique la différence des vitesses à cet endroit avec la méthode des panneaux. La pression a été normée ici avec la vitesse d'entrée W_1 (dont l'incidence est 22°) $C_p = 1 - (\frac{W}{W_1})^2$.

Sur la figure II.19 le calcul a été effectué dans une grille de profils NACA 0012, l'incidence α_1 étant de 8°, et les valeurs discrètes de comparaison ont été obtenues de la même façon que pour la figure II.18.

En conclusion, on a mis en oeuvre une méthode originale bi-dimensionnelle de panneaux non solidaires de la frontière du domaine de l'écoulement, en mettant en évidence certains paramètres de contrôle tel que la traînée C_x analytique, l'influence des différentes formes de bords de fuite et du nombre de points et de leur concentration de telle sorte qu'un calcul inverse se basant sur ces données peut être maintenant développé.

Fig. II.18
Comparaison des résultats obtenus par la méthode aux volumes finis (symboles isolés) et la méthode présente (courbe continue avec symboles) dans une grille de profils NACA 8410

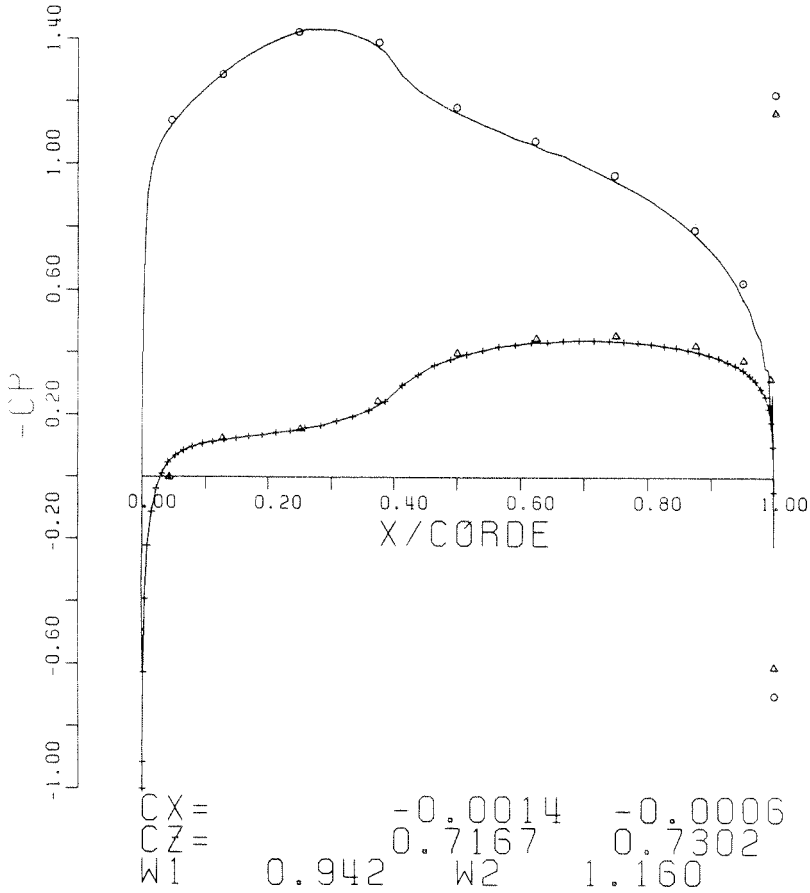
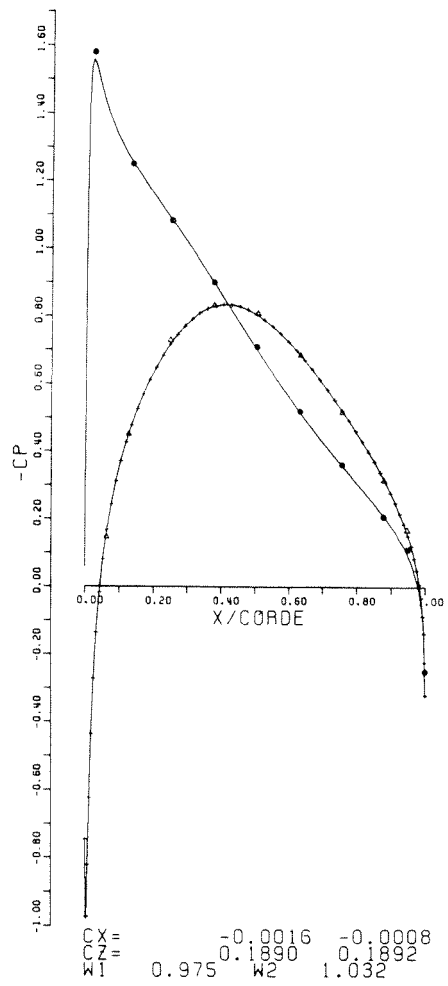


Fig. II. 19
Comparaison des résultats obtenus par la méthode aux volumes finis (symboles isolés) et la méthode présente (courbe continue avec symboles) dans une grille de profils NACA 0012



III. Resolution du probleme inverse par petites perturbations

III.1. Situation du problème inverse

Dès lors qu'on dispose d'une répartition de pression calculée à une certaine incidence sur un profil isolé ou en grille, on peut analyser l'effet de cette répartition et estimer qu'elle doit répondre à certains critères (on présentera dans le chapitre IV des critères concernant la cavitation). On va donc perturber selon ces critères la répartition de pression calculée et trouver une réponse géométrique cohérente à cette exigence physique, c'est à dire un nouveau profil dont la forme correspond à la pression fixée. On dispose dans cet écoulement de la loi de Bernoulli et de la condition de glissement en tout point du profil, en utilisant les coefficients de pression adimensionnels C_{p_i} , on impose une perturbation ΔC_{p_i} qui a une influence sur les autres grandeurs physiques et géométriques. Il se pose alors le problèmes des limites de cette influence qui peut se ramener soit à une simple perturbation dans le voisinage immédiat de chaque point de contrôle, soit à une perturbation dans tout le domaine, comme le problème est de nature elliptique. D'autre part, l'existence de la solution est liée à l'importance des modifications de la pression initiale. Néanmoins, dans le cadre de petites perturbations autour d'un cas calculé sur un aubage déjà existant, une solution irréalisable, telle que celle qui a pour résultat une queue de poisson, permet au moins de voir dans quel sens varier les perturbations pour qu'une solution existe.

III.2. Choix des paramètres de la perturbation

Pour caractériser une variation de pression et son influence sur la forme d'un profil, on est amenés à faire un choix aussi judicieux que possible des grandeurs de travail, ce d'autant plus qu'on désire accéder à une solution linéarisée, évitant ainsi tout problème de convergence.

Le principe est d'avoir à adopter un minimum d'hypothèses contraignantes avant de procéder à la linéarisation. Si l'on part d'une perturbation locale de la pression, la relation de Bernoulli nous donne directement une variation de la vitesse locale, à ce stade-là il n'existe pas d'autre façon de caractériser la perturbation, comme on ne dispose pas d'autres grandeurs descriptives. Ensuite pour décrire un changement de la forme du profil on utilise soit la variation de l'ordonnée à une abscisse fixe, soit la variation de la pente ou d'angle à cette même abscisse : une comparaison de 2 géométries proches, même différant très peu au bord d'attaque, permet d'affirmer que l'ordonnée y n'est pas la variable adaptée à une

linéarisation ultérieure, car la variation relative de y s'approche de, voire dépasse l'unité dans cette zone -là.

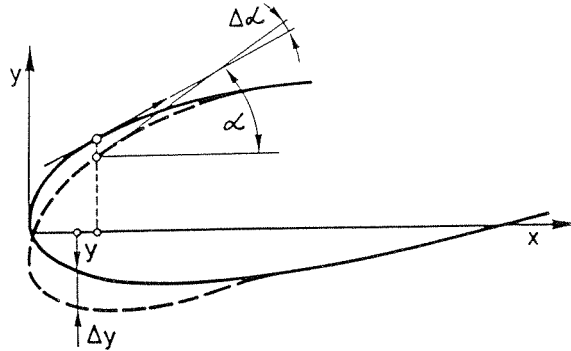


Fig. III.1 Illustration de la variation relative des paramètres géométriques

Par contre le choix de l'angle α , ou de la pente $y' = \tan \alpha$ comme variable géométrique de la perturbation apparaît comme appropriée, car cela favorise la résolution du calcul par l'utilisation de relations simples (conditions de glissement); en outre la variation absolue de l'angle α est indépendante du choix du repère.

III. 3. Méthode de perturbation aux différences finies

On va tout d'abord exprimer chaque variation locale de grandeur dynamique ou géométrique en fonction d'un petit paramètre géométrique ϵ , présenté en III.2. Un développement tronqué de la relation de Taylor donne:

$$\Delta C_{p_i} = \left(\frac{\partial C_{p_i}}{\partial \epsilon} \right)_i \epsilon_i \quad (1)$$

On différencie ensuite la relation de Bernoulli, normée par la pression dynamique:

$$C_p = 1 - (Vx^2 + Vy^2) = Vx^2(1 + y'^2)$$

par rapport à ce paramètre ϵ :

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial \varepsilon}\right)_i = -2V_{x_i} \left(\left(\frac{\partial V_{x_i}}{\partial \varepsilon}\right)_i (1+y_i'^2) + V_{x_i} \left(\frac{\partial y_i'}{\partial \varepsilon}\right)_i y_i' \right)$$

en appliquant la relation (1), on trouve:

$$\Delta C_{p_i} = -2V_{x_i} (\Delta V_{x_i}(1+y_i'^2) + V_{x_i} y_i' \Delta y_i') \quad (2)$$

qui est une relation liant ΔV_{x_i} à $\Delta y_i'$

De même, on différencie $\frac{\partial C_p}{\partial x}$ par rapport à ε , avec $\frac{\partial V_{x_i}}{\partial x} = V_{x_i}'$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial C_p}{\partial x}\right)_i = & -2 \left(\frac{\partial V_{x_i}}{\partial \varepsilon}\right)_i (V_{x_i}'(1+y_i'^2) + V_{x_i} y_i' y_i'') - 2V_{x_i} \left(\left(\frac{\partial V_{x_i}'}{\partial \varepsilon}\right)_i (1+y_i'^2) + 2V_{x_i}' y_i' \left(\frac{\partial y_i'}{\partial \varepsilon}\right)_i + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial V_{x_i}}{\partial \varepsilon}\right)_i y_i' y_i'' + V_{x_i} \left(\frac{\partial y_i'}{\partial \varepsilon}\right)_i y_i'' + V_{x_i} y_i' \left(\frac{\partial y_i''}{\partial \varepsilon}\right)_i \right) \end{aligned}$$

En appliquant la relation (1) :

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{dC_p}{dx}\right)_i = & -2 \Delta V_{x_i} (V_{x_i}'(1+y_i'^2) + V_{x_i} y_i' y_i'') - 2V_{x_i} (\Delta V_{x_i}'(1+y_i'^2) + 2V_{x_i}' y_i' \Delta y_i' \\ & + \Delta V_{x_i} y_i' y_i'' + V_{x_i} \Delta y_i' y_i'' + V_{x_i} y_i' \Delta y_i'') \end{aligned} \quad (3)$$

En remplaçant maintenant ΔV_{x_i} par sa valeur tirée de (2) et en formant $\Delta V_{x_i}'$ et $\Delta y_i''$ avec respectivement ΔV_{x_i} , $\Delta V_{x_{i-1}}$, $\Delta V_{x_{i+1}}$ et $\Delta y_i'$, $\Delta y_{i-1}'$, $\Delta y_{i+1}'$ d'après un schéma d'interpolation quadratique:

$$\Delta V_{x_i}' = \frac{\Delta V_{x_i} - \Delta V_{x_{i-1}}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{\Delta V_{x_i} - \Delta V_{x_{i-1}}}{x_{i+1} - x_i} + \frac{(\Delta V_{x_{i+1}} - \Delta V_{x_{i-1}})(x_i - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} \quad (4)$$

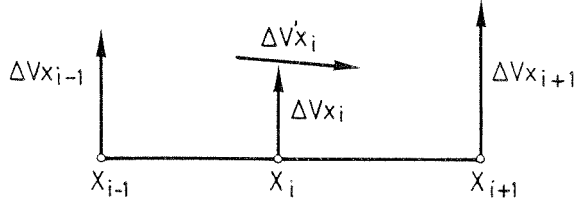


Fig. III.2 Schéma d'interpolation aux différences finies

on dispose d'une relation :

$$F(\Delta y'_i, \Delta y'_{i-1}, \Delta y'_{i+1}) = g(\Delta C p_i, \Delta(\frac{dCp}{dx})_i) \quad (5)$$

qui est un système linéaire à matrice tridiagonale permettant la résolution des $\Delta y'_i$ en fonctions des perturbations de pression $\Delta C p_i$.

Des tentatives d'application de cette méthode ont montré que la sous-estimation de l'influence de la perturbation conduit à des valeurs trop faibles de la variation de la pente à cause du petit nombre de points d'appuis, une augmentation de ce nombre compliquerait le schéma sans garantir le caractère elliptique de la solution. Pour assurer ce caractère elliptique, qui n'est évidemment pas contenu implicitement dans la relation locale de Bernoulli:

$$C_p = 1 - V x^2 (1 + y'^2)$$

on se propose de déterminer l'influence de la perturbation dans tout le domaine par l'intermédiaire des singularités.

III. 4. Méthode elliptique de perturbation

La variation de la vitesse locale est déterminée par la variation des coefficients d'influence et par celle des singularités, l'hypothèse principale à adopter dans ce processus est de considérer que la variation des coefficients d'influence est négligeable par rapport à celle des singularités. Le calcul direct montre que les valeurs des singularités sont proportionnelles aux valeurs locales des vitesses. Une variation de la survitesse provoque donc une variation proportionnelle de la valeur de la distribution σ , alors que les coefficients d'influence sont liés en premier lieu à la pente du segment de support de la distribution et à la distance du segment au point de contrôle. Par conséquent, on peut imaginer en première approximation que les segments de support sont translatés sans que leur orientation ne change, le coefficient d'influence du segment au point proximal ne varie pas, les coefficients des deux segments adjacents varient très peu.

En configuration grille, cette simplification a d'autant plus de validité qu'un déplacement Δy à une distance kt/L , $k=1,2,3,\dots$, est négligeable dans la variation du coefficient, $\Delta y \ll t/L$.

La loi de Bernoulli en fonction des variables choisies s'exprime:

$$C_{p_i} = 1 - (V_{x_i}^2 + V_{y_i}^2) \quad (6)$$

Une variation locale de la pression ΔC_{p_i} a pour conséquence une variation des grandeurs locales ΔV_{x_i} , ΔV_{y_i} et des singularités $\Delta \sigma_j$ sur tout le contour du polygone de support. Selon les hypothèses on pose :

$$\Delta V_{x_i} = \sum_j B V_{x_{ij}} \Delta \sigma_j \quad \text{avec} \quad \sigma_j \Delta B V_{x_{ij}} \ll B V_{x_{ij}} \Delta \sigma_j \quad (7)$$

$$\Delta V_{y_i} = \sum_j B V_{y_{ij}} \Delta \sigma_j \quad \text{avec} \quad \sigma_j \Delta B V_{y_{ij}} \ll B V_{y_{ij}} \Delta \sigma_j \quad (8)$$

La relation (6) exprimée au moyen des grandeurs perturbées devient :

$$C_{p_i} + \Delta C_{p_i} = 1 - ((V_{x_i} + \Delta V_{x_i})^2 + (V_{y_i} + \Delta V_{y_i})^2) \quad (9)$$

dans laquelle on introduit les relations (6),(7) et (8), après avoir éliminé les termes d'ordre supérieur :

$$- \Delta C p_i = 2 V x_i \sum_j (B V y_{ij} \operatorname{tg} \alpha_i + B V x_{ij}) \Delta \sigma_j \quad (10)$$

les $\Delta C p_i$ étant les grandeurs imposées. Cette formulation compacte n'est pas valable en $\alpha = \frac{\pi}{2}$. En fait pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$- \Delta C p_i = 2 V y_i \sum_j B V y_{ij} \Delta \sigma_j$$

On peut aussi procéder au même développement, mais à partir de la formulation $C_p = 1 - V x^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$. Ce développement possède des termes en $\Delta \alpha \operatorname{tg} \alpha$ et on pourrait se demander si ces termes sont réellement négligeables dans tout le domaine, mais ils sont de grandeur finie pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, car $\Delta \alpha = \frac{\Delta \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$, de telle sorte qu'on obtient aussi la relation (10) par cette voie là.

La résolution de ce système linéaire nous fournit les variations $\Delta \sigma_j$ de toute la distribution de singularités en fonction d'une perturbation donnée $\Delta C p_i$ de la répartition C_p calculée. Ces valeurs intermédiaires $\Delta \sigma_j$ sont introduites ensuite dans la relation exacte de glissement ou condition aux limites perturbée:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \Delta \alpha) = y'_i + \Delta y'_i = \frac{V y_i + \sum_j B V y_{ij} \Delta \sigma_j}{V x_i + \sum_j B V x_{ij} \Delta \sigma_j} \quad (11)$$

L'intérêt de cette démarche réside dans l'utilisation d'une relation exacte, non linéarisée, cohérente avec nos hypothèses sur les coefficients d'influence. La connaissance des nouvelles pentes tout autour du profil pour des abscisses fixes x_i est la base du calcul des nouvelles ordonnées y_i qu'on obtient par intégration. Dans le cas présent, une intégration successive par trapèzes à partir d'un point fixe, p.ex. du bord de fuite jusqu'au bord d'attaque, fournit les nouvelles ordonnées intrados et extrados. L'allure du profil au bord d'attaque nous indique si la nouvelle répartition de pression imposée est réalisable ou en contradiction avec les hypothèses de linéarisation (perturbation trop grande) selon que les côtés intrados et extrados

se croisent ou sont trop éloignés avant le bord d'attaque. Il faut que les courbes extrados et intrados se rejoignent entre les abscisses -0.5 et 0.5 %, pour que la solution soit plausible

La continuité du profil y et de la pente y' n'est pas assurée au bord d'attaque, à l'endroit où les courbes extrados et intrados se rejoignent, il faut donc établir une jonction telle que, dans cette région de forte courbure, la continuité de la dérivée seconde soit aussi assurée, on utilise la méthode des courbes paramétriques, présentée dans l'annexe E.

Dans la zone du point d'arrêt, ou plus généralement là où la pente est grande, la composante V_x de la vitesse est petite devant la composante V_y et l'ordre de grandeur de ΔV_x peut être le même que celui de V_x . Cette caractéristique n'a pas d'influence dans la relation (10) appliquée dans cette zone car V_y y apparaît aussi ; par contre il est possible que, dans le cas où ΔV_x est plus grand que V_x , le terme contenant la variation du coefficient d'influence $\Delta B V_x$ ne soit pas négligeable devant V_x , ce qui a une influence certaine sur le calcul de la nouvelle pente y' (11) d'autant plus que cette valeur est inversement proportionnelle à la composante V_x : la vitesse V_x est petite et apparaît seule au dénominateur. On peut donc obtenir des résultats erronés sur les premiers pour-mille du bord d'attaque, il est donc nettement plus correct d'intégrer le nouveau profil depuis le bord de fuite qu'on considère comme inchangé et de raccorder les deux courbes sans se soucier des valeurs des pentes sur les tout premiers points.

III.5. Généralisation du calcul de la perturbation

Imaginons d'abord que la perturbation de pression ne soit dépendante que de la perturbation d'un paramètre géométrique local ϵ_i , qu'on développe au premier ordre :

$$\Delta C_{p_i} = \left(\frac{\partial C_p}{\partial \epsilon} \right)_i \epsilon_i \quad \dots \quad (12)$$

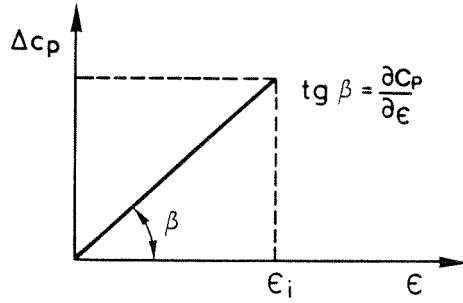


Fig. III.3 Développement de la perturbation selon un petit paramètre

On développe le gradient du coefficient de pression :

$$\Delta C_{p_i} = -2 \left(\sum_j (V_{x_i} \left(\frac{\partial B V_x}{\partial \epsilon} \right)_{ij} + V_{y_i} \left(\frac{\partial B V_y}{\partial \epsilon} \right)_{ij}) \sigma_j \right) + \sum_j (V_{x_i} B V_{x_{ij}} + V_{y_i} B V_{y_{ij}}) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)_j \epsilon_j \quad (13)$$

En négligeant, comme en III.4., les variations des coefficients d'influence, on obtient une relation pour ϵ_i :

$$\Delta C_{p_i} = -2 \left(\sum_j (V_{x_i} B V_{x_{ij}} + V_{y_i} B V_{y_{ij}}) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)_j \right) \epsilon_i \quad (14)$$

Parallèlement, on dérive la condition de glissement en négligeant aussi la variation des coefficients d'influence :

$$\sum_j (B V y_{ij} - y'_i B V x_{ij}) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)_j - \sum_j B V x_{ij} \left(\frac{\partial y'}{\partial \epsilon} \right)_i \sigma_j = \cos \alpha_\infty \left(\frac{\partial y'}{\partial \epsilon} \right)_i \quad (15)$$

On prend ensuite l'angle α comme petit paramètre et par conséquent la dérivée $\left(\frac{\partial y'}{\partial \epsilon} \right)_i = 1 + \tan^2 \alpha_i$. La résolution de ce système fournit les valeurs $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)_i$ qu'on introduit dans la relation du $\Delta C p_i$, on constate alors une perte d'information dans le résultat final car :

$$\Delta C p_i = 0 \rightarrow \Delta \alpha_i = 0$$

ce qui n'est pas possible étant donné le caractère elliptique de l'écoulement. La perturbation de la forme sera en effet trop petite par rapport à la perturbation de pression exigée.

Dans un deuxième temps, on suppose que la variation $\Delta C p_i$ est le résultat de la variation de tous les paramètres ϵ_j , pour obtenir un système linéaire:

$$\Delta C p_i = \sum_j \frac{\partial C p_i}{\partial \epsilon_j} \epsilon_j = -2 \sum_j (V x_i B V x_{ij} + V y_i B V y_{ij}) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)_j \epsilon_j \quad (16)$$

on remarque alors que les deux derniers termes de cette relation représentent maintenant les $\Delta \sigma_j$ et on retrouve la relation (10).

Cette généralisation illustre donc bien l'aspect global de toutes les dépendances. Il suffit de couper en un seul point la relation d'interdépendance entre les paramètres de la perturbation pour que le caractère elliptique de la perturbation soit perdu, d'où la nécessité de tenir compte de toutes les dépendances, même dans un tel calcul linéarisé. Dans un développement au premier ordre, la contribution de toutes les perturbations n'est pas négligeable, même si chacune d'entre elles reste petite.

IV. Données et caractéristiques de la cavitation dans une machine

Il va s'agir maintenant d'appliquer cette méthode à des aubages de machines hydrauliques et ce, pour améliorer leur comportement cavitant. Avant toute chose, il est nécessaire de déterminer un repère moyen des conditions de pression régnant sur l'aubage par rapport à la chute du point de fonctionnement considéré et à la pression de vapeur

IV. 1.1. Chiffre de cavitation d'une installation

Rappel: le chiffre de cavitation dans une installation est défini de la façon suivante :

$$\sigma = \frac{h_A - H_S - t_V}{H}$$

h_A et t_V sont respectivement la pression au niveau libre aval (en général la pression atmosphérique) et la pression de vapeur divisées par ρg .

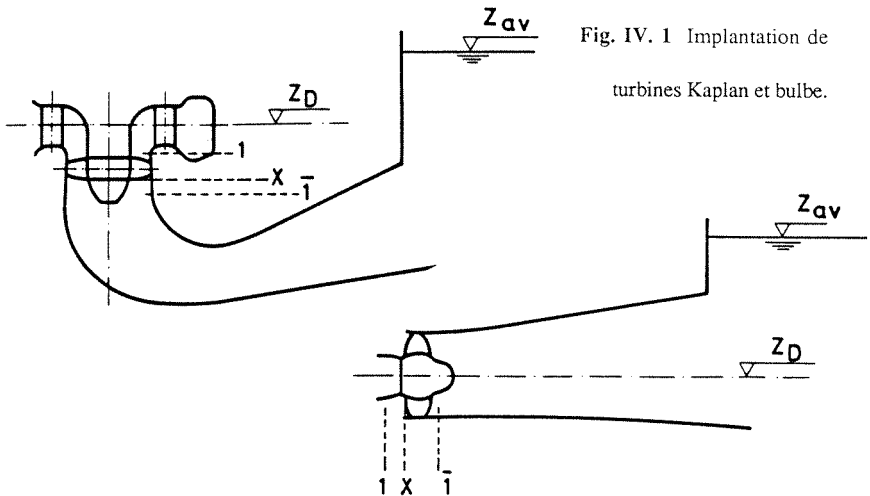


Fig. IV. 1 Implantation de turbines Kaplan et bulbe.

$H_S (= Z_D - z_{AV})$: l'implantation de la machine, Z_D la cote de référence de la roue, définie différemment selon que la roue tourne autour d'un axe vertical ou horizontal, Z_{AV} : la cote du niveau aval minimal .

H : la chute maximale disponible.

On exprime aussi σ par $\frac{NPSH}{H}$, où le NPSH est la hauteur nette d'aspiration (Netto Pressure Suction Head)

On dispose ainsi, pour chaque installation, d'un chiffre adimensionnel, indépendant des caractéristiques de l'aubage, permettant de déterminer la marge entre une pression statique de référence et la pression de vapeur.

Dans le cas de test d'hydrofoil ou de profil monté dans un tunnel hydrodynamique, on définit le chiffre de cavitation par les conditions amont p_∞ et w_∞ :

$$\sigma = \frac{p_\infty - p_v}{\frac{1}{2}w_\infty^2}$$

IV.1.2. Développement et influence de la cavitation dans les machines

Dans une machine axiale ou à entrée axiale (pompe centrifuge)[28], on peut établir une certain ordre d'apparition des différents types de cavitation à l'entrée de l'aubage ainsi qu'une hiérarchie des différents types de cavitation associés à un risque d'érosion.

Par exemple, considérons l'évolution du rendement d'une machine à forte charge en un point de fonctionnement donné, à chute et débit constants, associée à une baisse progressive du chiffre de cavitation, on constate alors le développement suivant des figures bi-dimensionnelles de cavitation ou quasi bi-dimensionnelles si elles sont isolées, mais suivent une ligne de courant:

A: premières apparitions de poches

sur l'arête d'entrée

B: développement des poches (photo)

(arête d'entrée de roue de type kaplan)

C: forte instabilité des poches



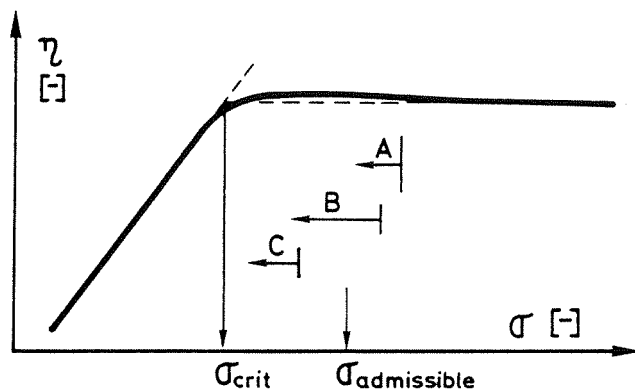
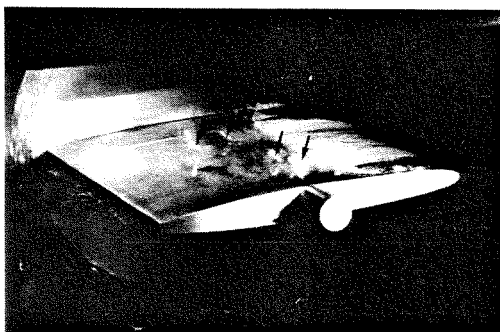


Fig. IV.2. Courbe de rendement en fonction du σ pour un point de fonctionnement

La comparaison des observations sur modèle et des dégâts sur prototype a démontré que le risque d'érosion est associé à des niveaux de pression supérieurs au σ critique caractérisant la baisse du rendement, car dès l'apparition de ces poches, des cavités instationnaires et érosives sont libérées à la fermeture de ces poches stationnaires [39],[40],[41].



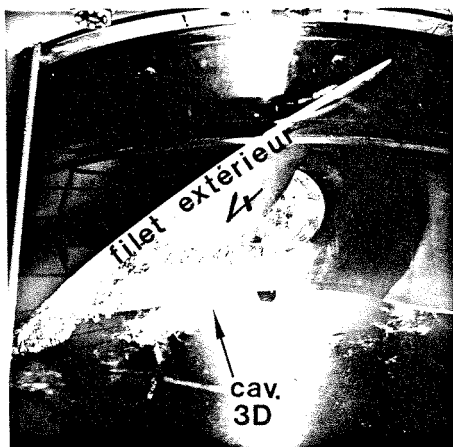
Cavités érosives à
l'arrière d'une poche.

Tunnel de cavitation
de l'IMHEF

$w_{\infty} = 20 \text{ m/s}$

$\sigma = .81$

La zone caractéristique de baisse de performance de la machine correspond soit à un développement important des cavités qui modifie l'écoulement soit à l'apparition d'autres types de cavitation telle que la cavitation 3-dimensionnelle au moyeu qui a pour conséquence l'affectation progressive du rendement de la roue (photo). D'autres genres de cavitation présentent des dangers érosifs tels que la cavitation d'entrefer.



Cavitation au moyeu d'une roue de type Kaplan

Le danger de ces cavités rencontrées avant la phase C permet au constructeur de définir un chiffre de cavitation σ admissible sensé permettre de déterminer empiriquement la hauteur d'implantation de la machine par rapport au niveau aval minimum. Une procédure simple à suivre pour des cavitations d'extrados consiste à évaluer le risque d'érosion par une longueur relative de poche[35].

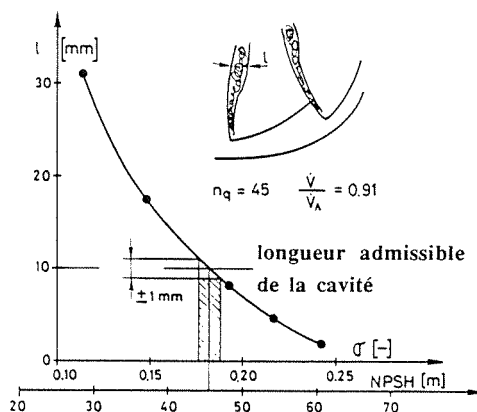


Fig. IV. 3. Détermination d'une longueur de figure acceptable (pompe centrifuge)

L'implantation de l'installation sera faite à partir de la plus forte valeur de σ admissible correspondant à chacun des points de fonctionnement du domaine d'utilisation de la machine. Le σ admissible doit être réduit autant qu'il est nécessaire, car la hauteur d'implantation, proportionnelle à σ , revêt une grande importance économique, elle est en effet déterminante dans les coûts de génie civil de l'installation. Dès lors, on comprend l'intérêt de diminuer la différence entre le σ admissible maximum rencontré et le σ critique, qui limite quant à lui le bon fonctionnement hydraulique de la machine. L'amélioration du σ admissible résulte d'un compromis entre les différents risques de cavitation érosive associés à chaque point de fonctionnement du domaine utile, en effet, une modification importante permettant d'éliminer la cavitation d'entrée extrados à un débit élevé risque de correspondre à une augmentation du danger de cavitation intrados à faible débit.

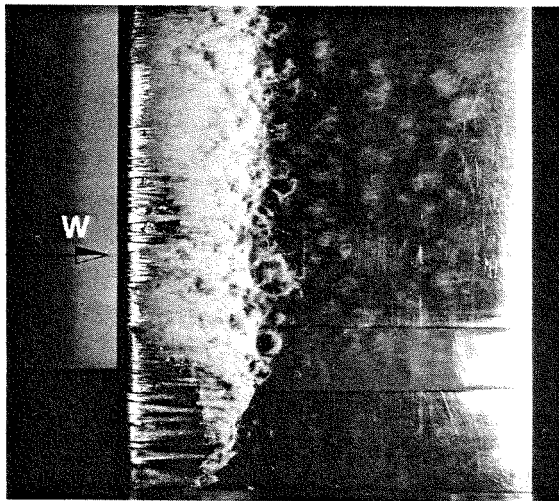
Contrairement à la cavitation d'entrée des turbines Francis très érosive et fortement 3-D, la cavitation des machines axiales se prête à l'application d'une analyse 2-D telle qu'elle a été présentée auparavant. D'autre part, l'utilisation de mesures initiales ou de visualisations est importante, car on peut d'autant plus assurer une modification allant dans le sens d'une amélioration du comportement cavitant de l'aufrage, que la satisfaction de cette exigence est facilitée par la comparaison du calcul et des mesures.

IV.2. Cavitation à poche partielle au bord d'attaque d'un aubage

IV.2.1. Allure générale

L'allure générale de la poche de cavitation, dans le domaine des machines étudiées, est beaucoup plus dépendante des forces de frottement et d'inertie que des forces de tension superficielle γ , contrairement à la cavitation à bulles où le rayon des germes, et par conséquent la tension superficielle, joue un rôle dynamique très important à des valeurs de σ beaucoup plus faibles. Cette affirmation est corroborée par l'aspect de la poche qui présente une faible courbure au détachement,

Cette cavitation à poche est conséquence soit d'un mauvais profilage de l'arête d'entrée, soit d'un angle d'incidence élevé, négatif ou positif, provenant d'un fonctionnement à fort ou faible débit. Le pic de dépression ainsi créé facilite la formation d'une zone morte en aval, due au possible décollement de la couche limite, où peut se développer la poche de cavitation [29], ou un micro décollement tri-dimensionnel sur une rugosité, qui génère un fuseau conique de vapeur [30], celui-ci peut former alors, avec d'autres fuseaux voisins, une poche d'aspect continu si le σ est abaissé ou si l'incidence est augmentée.



Réunion de figures 3-dimensionnelles en une seule cavité

IV.2.2. Stabilité au détachement

On peut aborder le cas du détachement de la poche de 2 façons, premièrement, on choisit de laisser de côté les effets de viscosité et de tension superficielle pour considérer uniquement le détachement de la poche du point de vue du calcul potentiel, en cet endroit, la vitesse normale au profil est nulle et la vitesse tangentielle est constante, la courbure de la ligne de courant à droite de ce point est infinie et le gradient de pression présente une discontinuité, le critère de Villat consiste à choisir le point de détachement pour que ces singularités disparaissent [31]. Il n'est pas possible de travailler uniquement avec ce critère, parce que l'utilisation de valeurs discrètes ne correspond pas systématiquement au point même du détachement qui doit donc être choisi arbitrairement, mais encore parce qu'une infinité de solutions de poches peuvent être obtenues à partir d'une valeur du chiffre de cavitation σ donnée [32], d'autre part l'approximation de dérivées supérieures dans un ensemble de valeurs discrètes est trop dépendante du choix de la méthode, bien que ce critère soit plaisant, la comparaison avec les mesures ne donne pas de résultats satisfaisants. Dans un deuxième ordre de considération, on peut supposer, en tenant compte des effets de la viscosité, qu'il se passe d'abord un décollement de la couche limite et que le détachement de la poche a lieu en amont, il s'agit alors de mettre en jeu l'équilibre des forces de frottement et de tension superficielle [29],[33]. Pour des nombres de Reynolds faibles, (cas de la lubrification) on considère le gradient de l'expression $(P + \gamma/R)$ dans le sens de l'écoulement avec P comme pression dans le liquide, R le rayon de courbure à l'interface du point de détachement de la poche et γ la tension superficielle. Ce gradient doit être positif pour qu'une petite variation de l'interface dans le sens de l'envergure soit amortie. Compte tenu du fait que le gradient de $\frac{1}{R}$ est négatif et faible pour de telles poches allongées, une poche de cavitation ne prend naissance que dans un environnement où la pression augmente, ce qui confirme la thèse selon laquelle un détachement se produit en tout cas après le décollement de la couche limite laminaire, pour autant que la pression absolue soit en dessous de la pression de vapeur et quoique les gradients de pression au travers de la zone décollée puissent être plus importants que dans une simple couche limite. Pour des nombres de Reynolds élevés, correspondant au cas industriels, le phénomène devient plus complexe, car on se situe dans la zone de transition de telle sorte qu'un détachement devient tri-dimensionnel, étant donné qu'il existe une alternance transversale de zones laminaires décollées et turbulentes non-décollées pour une même abscisse, alors le détachement est lié à une rugosité

IV.2.3. Rattachement et instabilité de la fermeture

Au point de rattachement, le critère est inversé et le gradient de l'expression $(P + \gamma/R)$ doit être négatif dans le sens de l'écoulement, un rattachement stable ne se produit que dans un environnement où le gradient de pression est négatif, et pour un nombre de Reynolds plus élevé, le cisaillement turbulent augmente encore l'instabilité de la fermeture de la poche. La pulsation violente de la fermeture peut être modélisée selon l'hypothèse du jet rentrant [34] mais qui s'avère insuffisante, car elle n'explique pas la formation des vortex cavitants qui vont endommager la surface de l'aubage en aval [35], elle correspond en fait plus au cas de très grosses poches pulsantes. On caractérise ce phénomène biphasique par une longueur de pulsation de la zone de fermeture de la poche, qui est fonction principalement du nombre de Reynolds et, pour des valeurs élevées de celui-ci, du niveau de turbulence de l'écoulement. L'influence de la rugosité de la surface de l'aubage sur la turbulence n'est pas déterminante le long de la poche, mais pourrait avoir une importance dans la zone du recollement.

La longueur moyenne de la poche est liée, au premier ordre, au niveau des pressions qu'on représente par l'écart entre la pression locale et la pression de vapeur divisé par une pression dynamique de référence (chiffre de cavitation). On constate que la diminution de ce chiffre adimensionnel σ pour une configuration donnée (incidence et vitesse constantes) a comme conséquence un allongement de la poche. Dans la poche, à la pression de vapeur : $C_p = -\sigma$.

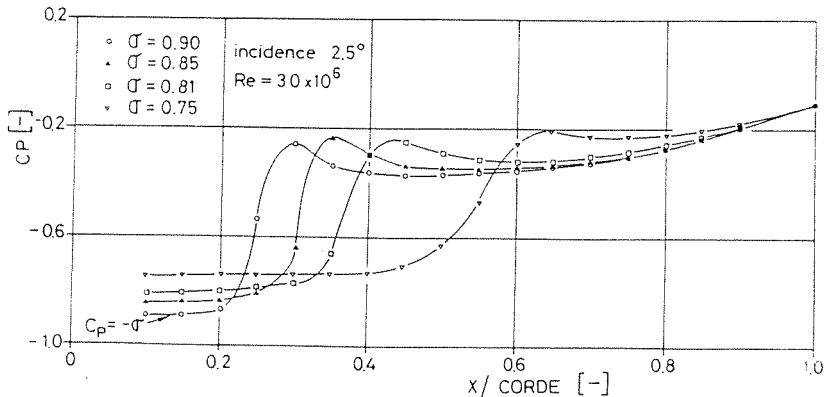


Fig IV.4 Pressions mesurées le long d'un profil partiellement cavitant (photos page 56)

L'augmentation du nombre de Reynolds ($>10^6$) a pour effet un allongement du sillage de la poche à un σ fixé. Des mesures de pression effectuées sur un profil partiellement cavitant à σ constant et vitesse variable montrent cet effet sur le sillage.

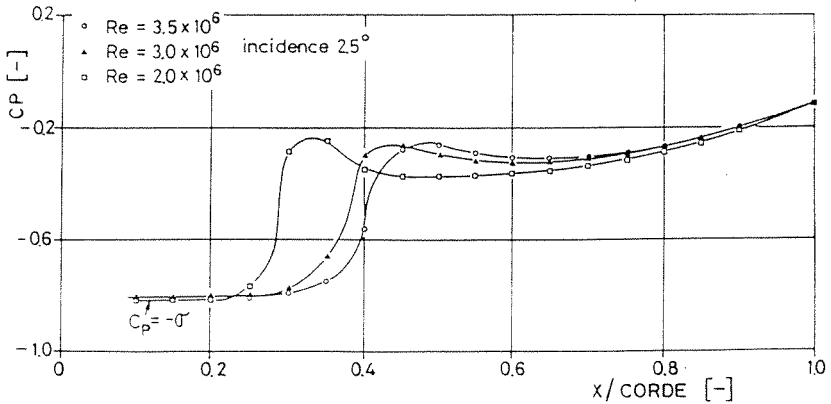


Fig V.5. Pressions mesurées à σ constant pour 3 nombres de Reynolds

L'étude complète de la cavitation à poche partielle exige donc d'inclure une similitude en nombre de Reynolds et en chiffre de cavitation, ce qui dépasse largement le cadre de ce travail. En effet, l'objectif fixé est de retarder l'apparition de la poche aussi loin qu'il est nécessaire. Nous allons étudier alors, dans un écoulement de machine axiale, l'apparition et le développement de la poche en relation avec les pics de dépression obtenus par le calcul potentiel en subcavitant. Ceci est effectué afin de déterminer quelle modification apporter à ces pics (la modification allant dans le sens d'un adoucissement des gradients de pression locaux) et par la même quel niveau de pression fixer pour la définition d'un nouveau bord d'attaque. La méthode de calcul utilisée sera ensuite adaptée à un calcul de poche proprement dit, afin de comparer l'aptitude de simulation de cette méthode avec d'autres techniques utilisées et surtout de comparer les calculs avec des mesures de pression sur un profil partiellement cavitant.

IV.3. Cavitation dans une turbine

IV.3.1. relation entre pressions calculées en système relatif et chiffre d'installation

On introduit le chiffre liant une pression statique locale à la pression statique de référence :

$$C_{Px} = \frac{(h_x + Z_x) - (h_D + Z_D)}{H} \quad (1)$$

En négligeant les pertes dans l'aspirateur et la roue, on écrit la loi de Bernoulli entre la sortie de l'aubage et le niveau aval:

$$h_{AV} + Z_{AV} = h_1^- + Z_1^- + \frac{C_1^-^2}{2g} \quad (2)$$

puis entre l'entrée et la sortie de l'aubage:

$$h_1 + Z_1 + \frac{C_1^2}{2g} = h_1^- + Z_1^- + \frac{C_1^-^2}{2g} + H \quad (3)$$

Ceci est valable sur toute l'aube, on suppose donc que l'échange d'énergie est uniforme pour tous les filets. Il faut remarquer en outre, que, dans le cas de la turbine, calculer sans pertes dans l'aspirateur ainsi que dans les aubes directrices revient à introduire un facteur de sécurité.

Ensuite, avec $Z_{AV} - Z_1^- = Z_{AV} - Z_D + Z_D - Z_1^-$, on peut écrire :

$$h_1^- = H_S + t_V + Z_D - Z_1^- - \frac{C_1^-^2}{2g} \quad (4)$$

Avec une référence par l'aval $C_{Px} = \frac{(h_x + Z_x) - (h_1^- + Z_1^-)}{H}$, alors :

$$HCp_X = h_X + Z_X - H_s - t_V - Z_D + \frac{C_1^2}{2g} \quad (5)$$

Si on désire une référence par l'amont : $Cp_X = \frac{(h_X + Z_X) - (h_1 + Z_1)}{H}$

$$HCp_X = h_X + Z_X - H_s - t_V - Z_D - H + \frac{C_1^2}{2g} \quad (6)$$

On norme ensuite les vitesses : $c^2 = \frac{C^2}{2gH}$ pour faciliter la notation.

Il faut ensuite relier le coefficient de pression Cp_X au coefficient de pression calculé sur un profil, introduisons alors la notion de chute partielle ΔH entre le point x et l'entrée de l'aubage par exemple, alors :

$$Cp_X = c_1^2 - c_X^2 - \frac{\Delta H}{H} \quad (7)$$

or d'après le théorème d'Euler : $\frac{\Delta H}{H} = 2u_1cu_1 - 2u_Xcu_X$, ainsi, avec $c_1^2 + u_1^2 - 2u_1c_1 = w_1^2$

$$Cp_X = w_1^2 - w_X^2 + u_X^2 - u_1^2 \quad (8)$$

sur un filet cylindrique : $u_X = u_1$

et, avec $Cp = 1 - \frac{w_X^2}{w_\infty^2}$

$$Cp_X = w_1^2 - w_\infty^2 (1 - Cp) \quad (9)$$

Ainsi, la marge à la cavitation $\frac{h_X - t_V}{H}$ peut être écrite, soit avec la référence par l'amont :

$$\frac{h_X - t_V}{H} = \frac{Z_D - Z_X}{H} - c_1^2 + 1 + \sigma + w_1^2 - w_\infty^2 (1 - C_p) \quad (10)$$

ou par l'aval :

$$\frac{h_X - t_V}{H} = \frac{Z_D - Z_X}{H} - c_1^2 + \sigma + w_1^2 - w_\infty^2 (1 - C_p) \quad (11)$$

la limite statique de la cavitation survenant, lorsque $h_X = t_V$, ce qui donne une condition nécessaire pour qu'il n'y ait pas de développement de la cavitation, toutes les autres valeurs étant fixées :

$$C_p > \frac{\frac{Z_X - Z_D}{H} + c_1^2 - w_1^2 - 1 - \sigma}{w_\infty^2} + 1 \quad (\text{réf. amont}) \quad (12)$$

$$C_p > \frac{\frac{Z_X - Z_D}{H} + c_1^2 - w_1^2 - \sigma}{w_\infty^2} + 1 \quad (\text{réf. aval}) \quad (13)$$

IV.4. Cavitation dans une pompe

IV.4.1. Relation entre pressions calculées dans un système relatif et chiffres d'installation

Les relations présentées en IV.4.1. restent valables, si ce n'est que la vitesse absolue à l'entrée de la roue est maintenant C_1^- et à la sortie C_1 .

Il faut ensuite admettre que des pertes ΔH_a existent entre l'orifice d'aspiration et l'entrée de la roue, on va donc exprimer le rendement de cete partie de l'installation, en considérant qu'il n'y a pas de pertes entre le niveau libre amont et l'orifice d'aspiration:

$$h_a = 1 - \frac{\Delta H_a}{H} = 1 - \frac{h_{AV} + Z_{AV} - (h_1^- + Z_1^- + \frac{C_1^{-2}}{2g})}{H} \quad (14)$$

On écrit la loi de Bernoulli entre l'entrée et la position x sur le profil, avec la chute partielle ΔH :

$$h_x + Z_x + \frac{C_x^2}{2g} = h_1^- + Z_1^- + \frac{C_1^{-2}}{2g} + \Delta H \quad (15)$$

Si l'écoulement vers l'entrée n'a pas de prérotation : $Cu_1^- = 0$ alors :

$$\Delta H = 2 \frac{U_x Cu_x}{2g} \quad (16)$$

En général, le chiffre de cavitation de la pompe est défini au moyen de la cote de l'arête d'entrée Z_1^-

$$\sigma = \frac{h_{AV} + (Z_{AV} - Z_1^-) - t_v}{H} \quad (17)$$

On peut exprimer la marge à la cavitation:

$$h_x - t_v = \eta_a H - H + \sigma H - \frac{C_x^2 - 2U_x Cu_x}{2g} + Z_1^- - Z_x \quad (18)$$

Et finalement, comme $C^2 - 2UCu = W^2 - U^2$, la limite statique de l'apparition de la cavitation s'énonce, avec les vitesses adimensionnelles:

$$\sigma = 1 - \eta_a + (1 - C_p)w_\infty^2 - u_x^2 + \frac{Z_x - Z_1^-}{H} \quad (19)$$

On remarque qu'un bon rendement de l'aspirateur diminue le chiffre théorique d'apparition de la cavitation dans une pompe.

V. MISE EN OEUVRE ET APPLICATION DU CALCUL INVERSE A UN PROFIL ISOLÉ

V.1. REMARQUES GÉNÉRALES

Sur la figure suivante, une schématisation du processus de calcul inverse est présentée. On peut ajouter que les pressions ou vitesses obtenues lors du premier passage pourraient aussi provenir de mesures pour autant qu'on calcule parallèlement les coefficients d'influence correspondants. Le contrôle de l'aubage transformé serait ensuite réalisé par un calcul direct. On reviendra plus en détail dans la discussion du calcul inverse en grille sur la signification de grille partielle. Sur un ordinateur Cyber 855, un calcul direct nécessite 5 secondes pour un profil isolé et 18 secondes pour une grille d'aubes, tandis qu'un calcul inverse est effectué en 4 secondes (8 secondes pour la grille) (150 points).

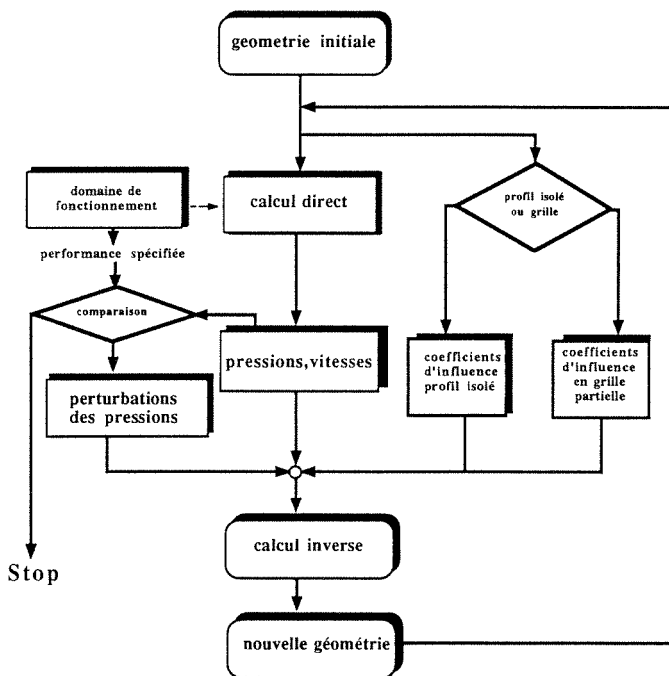


Fig. V.1 Principe du calcul inverse réalisé

La modification d'une distribution de pression à une incidence donnée peut correspondre à de grandes perturbations. Pour rester dans le cadre des hypothèses de petites perturbations, on doit veiller à ne donner que de faibles variations de pression dans le région du bord d'attaque, en effet, dans cette région, au voisinage du point d'arrêt, les gradients de vitesse sont extrêmement élevés, quel que soit le niveau de la survitresse, il est par conséquent malaisé d'établir une perturbation physiquement plausible à l'extrados, sans qu'une perturbation correspondante soit nécessaire à l'intrados. Comme, en outre, l'écoulement au bord d'attaque est très sensible à une faible variation de la géométrie, on devra travailler à une incidence faible, quitte à vérifier que le résultat corresponde à ce qui a été recherché à l'incidence nominale. Si par contre la perturbation de pression nécessaire pour atteindre un certain niveau de pression à une incidence fixée est élevée, on peut réaliser le calcul de perturbation en plusieurs étapes.

Compte tenu du fait que, en général, on doit veiller à ce que l'aubage ou le profil isolé ne soit pas sensible à une variation de l'incidence, le résultat escompté dans le cas de l'élimination de la cavitation sera avant tout d'obtenir des profils où le pic de dépression au bord d'attaque soit faible et varie peu dans le domaine plutôt qu'un profil sur lequel la répartition atteint un niveau prescrit à une incidence donnée.

V.2. APPLICATION A UN PROFIL ISOLÉ

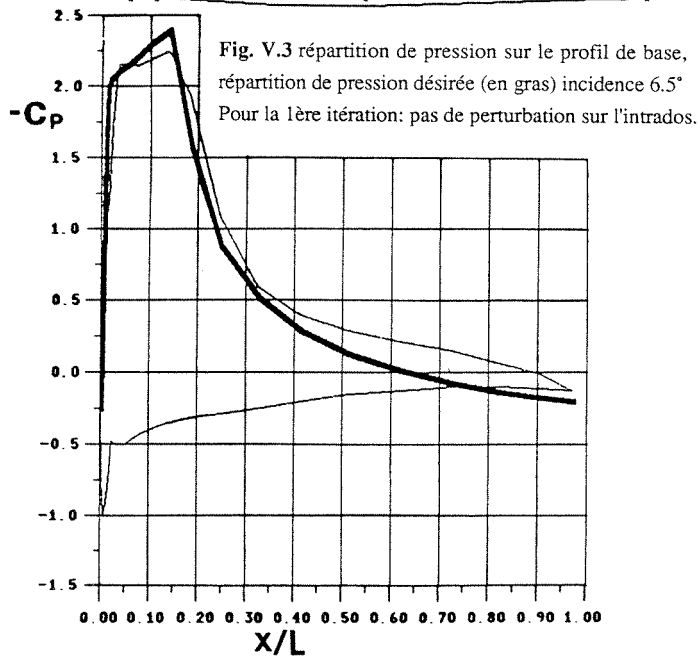
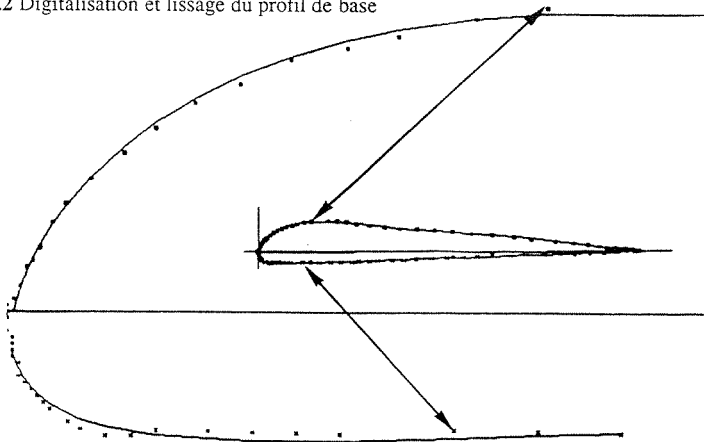
La validation de la méthode passe aussi par l'application sur des profils isolés, bien que d'autres méthodes existent, il est intéressant de l'appliquer aussi dans un cas bien spécifique et de démontrer qu'on peut satisfaire des exigences correspondant à un point de fonctionnement aussi bien que dans un domaine de travail et que, en outre, de relativement grandes perturbations de pression sont acceptables pour cette résolution linéarisée. Les coefficients BV_x et BV_y utilisés dans le calcul inverse (Fig. V.1.) pour un profil isolé sont les mêmes que ceux du calcul direct.

V.2.1. Détermination d'un profil à coefficient de frottement extrados minimal

Cette application est réalisée dans le but d'obtenir un profil à traînée minimale. On impose une répartition de pression calculée de telle façon que la couche limite, turbulente dès le point de vitesse maximale (Stratford) [36], soit toute proche du décollement, le gradient transversal $\frac{\partial V_x}{\partial y}$ étant ainsi quasi nul à la paroi, le frottement pariétal qui lui est directement lié devient négligeable de telle sorte que la contribution de la partie arrière de l'extrados à la traînée de frottement soit quasi nulle. Le profil initial, présenté dans la figure V.2., a été digitalisé puis

frottement soit quasi nulle. Le profil initial, présenté dans la figure V.2., a été digitalisé puis lissé. La comparaison de la distribution de pression initiale à 6.5° d'incidence avec la distribution dite de Stratford présente un écart notable particulièrement au bord d'attaque et au bord de fuite, voir fig V.3.

Fig V.2 Digitalisation et lissage du profil de base



La recherche du nouveau profil est faite en deux étapes principales, nous allons approcher tout d'abord l'écoulement désiré à l'extrados jusqu'à 70% de la corde, puis raffiner ensuite le bord de fuite pour obtenir l'écoulement désiré sur tout l'extrados, l'incidence de travail étant 6.5° . Une perturbation ne sera prescrite à l'intrados qu'en cas de nécessité d'éviter une queue de poisson.

Après un premier passage, on remarque un épaissement de l'extrados jusqu'à 20% de la corde suivi d'un amincissement.

La répartition de pression correspondant à cette nouvelle géométrie est plus proche de la répartition souhaitée dans la région du bord de fuite et la pointe de dépression au bord d'attaque a été diminuée, on constate donc une convergence malgré la valeur élevée de ΔC_p (.5) au bord d'attaque.

Au deuxième passage, on impose l'écoulement extrados de Stratford jusqu'au bord de fuite ($C_p = -.2$), ce qui n'avait pas été réalisé dans la 1ère itération ($C_p = -.15$). On observe alors une surépaisseur sur tout l'intrados et un amincissement de l'extrados.

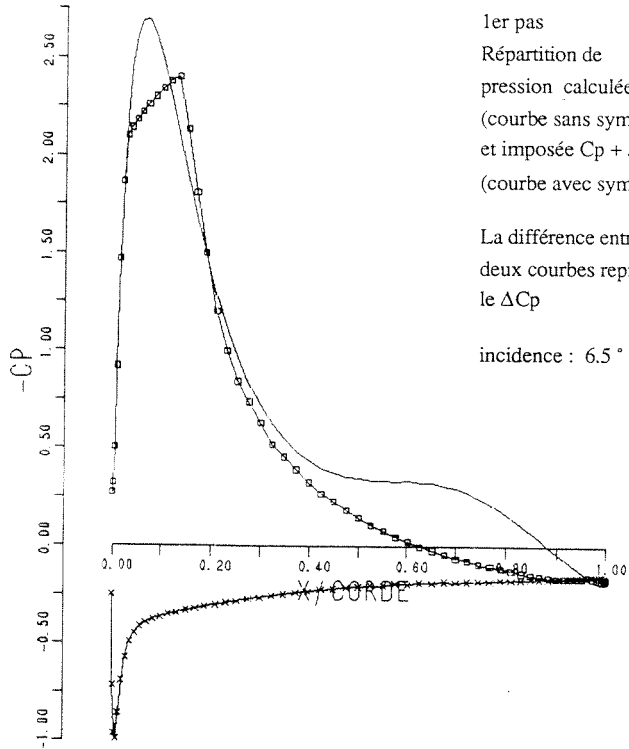
Pour la troisième itération, on impose une accélération plus forte à l'intrados dès 40% de la corde afin d'éviter une queue de poisson au bord de fuite due à un croisement des surfaces extrados et intrados, parce que la pression désirée sur l'extrados correspond à un amincissement. On obtient ainsi un épaissement de l'extrados jusqu'à 45% suivi d'un amincissement.

Une quatrième itération s'avérant nécessaire pour arriver à la pression voulue à l'extrados, on impose une vitesse supérieure au bord de fuite intrados, toujours pour éviter cette queue de poisson.

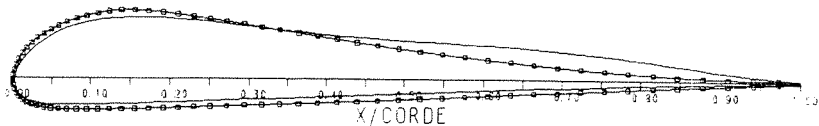
Sur le profil final, on peut constater que le point de tangente verticale au bord d'attaque est surélevé d'environ 1,5% par rapport à la corde initiale, d'autre part la pente du squelette est positive au bord de fuite, ce qui sans un tel calcul n'est pas intuitivement évident. Il faut remarquer en outre que la convergence est plus rapide dans une zone où la vitesse est supérieure à W_∞ que dans la zone du bord de fuite où la vitesse est proche de W_∞ .

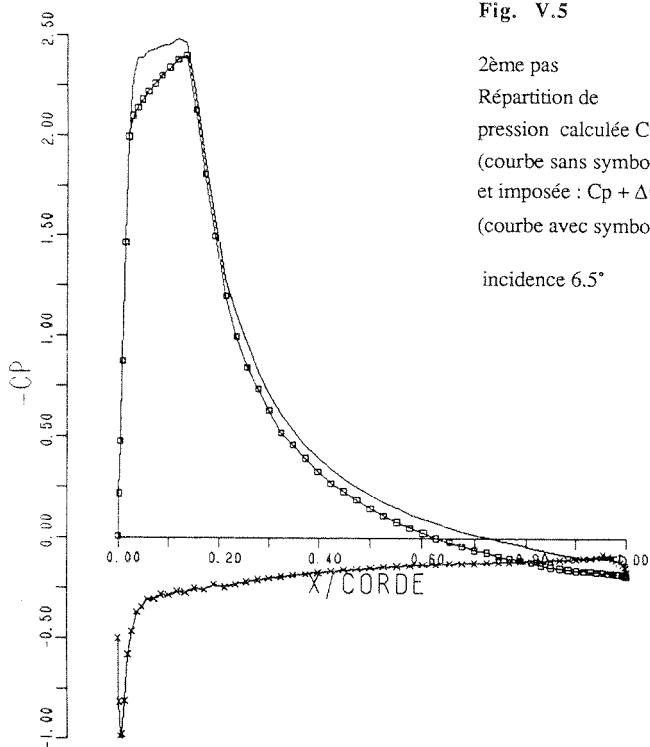
Il est donc intéressant de constater qu'on peut traiter le problème sans trop de difficultés en deux étapes distinctes, à savoir la correction du bord d'attaque puis celle du bord de fuite. D'autre part, l'approche de la solution est facilitée par la structure du schéma de résolution qui permet de changer à chaque pas du calcul la répartition de pression prescrite.

Fig. V.4

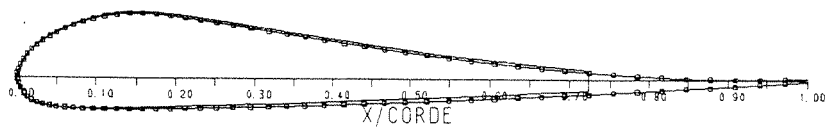


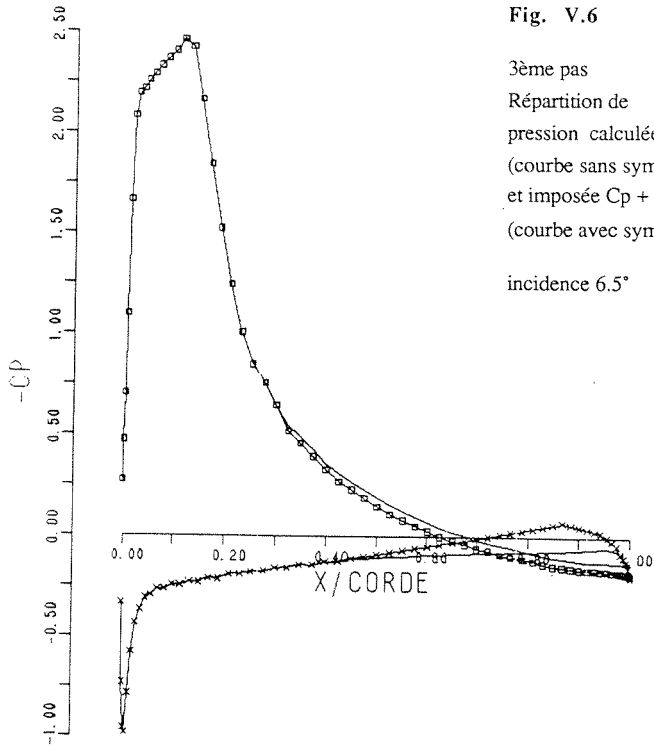
Profil corrigé (courbe avec symboles), superposé au profil initial (courbe sans symboles, lissage du profil de base)





Profil corrigé, (courbe avec symboles), superposé au profil initial (courbe sans symboles) qui est le profil corrigé du pas précédent.

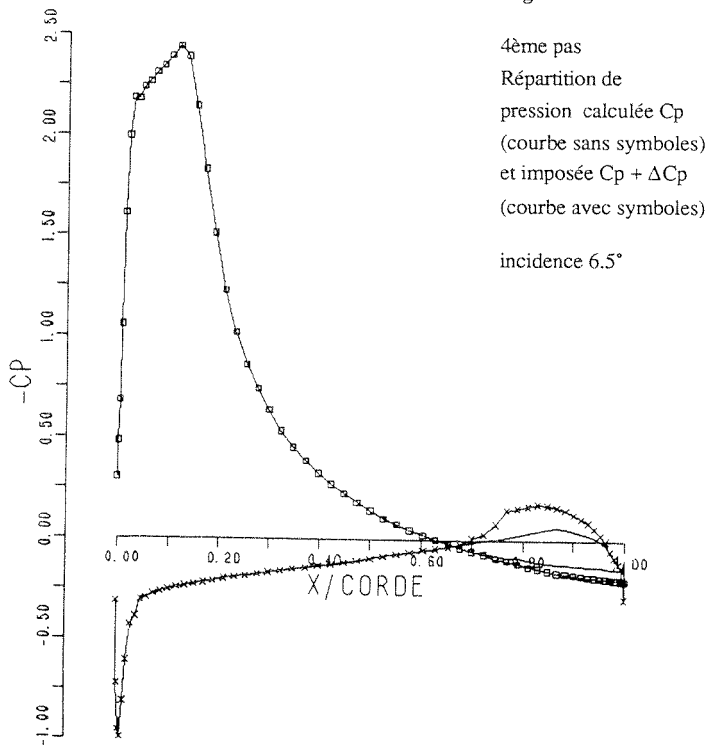




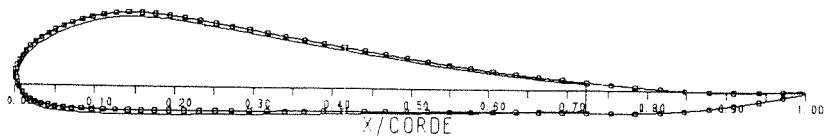
Profil corrigé, (courbe avec symboles), superposé au profil initial (courbe sans symboles) qui est le profil corrigé du pas précédent.



Fig. V.7



Profil corrigé, (courbe avec symboles), superposé au profil initial (courbe sans symboles) qui est le profil corrigé du pas précédent.



Les résultats de mesure de traînée effectuée sur le profil final par une balance aérodynamique montrent qu'une traînée minimale est obtenue à l'incidence 6° . Etant donné que la couche limite est proche du décollement turbulent à cette incidence, ce décollement survient rapidement, si l'incidence est augmentée. On observe effectivement une croissance rapide de la traînée accompagnant le décrochage à partir de 7° . Ces mesures ont été réalisées à l'institut d'Hydro- et Aérodynamique de l'Ecole Polytechnique de Trondheim en Norvège (NTH).

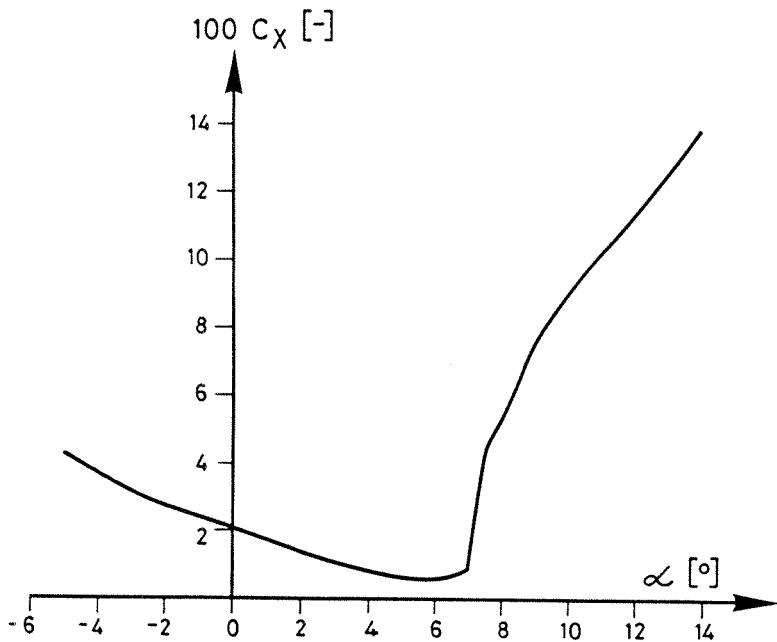


Fig V.8. traînée aérodynamique mesurée

VI APPLICATION DU CALCUL INVERSE À DIFFÉRENTES MACHINES

VI.1. GRILLE D'AUBES

Dans une grille d'aubes, les coefficients d'influence contiennent les caractéristiques de la grille: le pas t/L et le calage β_* . Si le but fixé est d'améliorer la géométrie du profil sans modifier les caractéristiques de la grille, il ne faut évidemment pas varier les paramètres précédents. Pour découpler l'influence de la grille infinie et celle du profil proprement dit, on calcule les coefficients d'influence pour le calcul inverse dans une grille partielle (3,5,7... aubes, selon le pas de la grille, en général 3 suffisent), tout en prenant soin que la portance ne varie au point considéré, puisque la déviation est proportionnelle à la portance. On force ainsi la perturbation à n'agir que sur la forme du profil. Les vitesses infini amont et aval pouvant varier en fonction de la portance, on doit vérifier que les modifications n'affectent pas les caractéristiques hydrauliques de l'aubage. On peut d'ailleurs très bien imaginer une grille formée de différents profils, mais sur lesquels la portance est identique à une incidence donnée, alors la vitesse aval est identique sur toute la grille puisque la déviation est proportionnelle à la portance.

On contrôle l'influence des modifications de l'aubage sur les performances du filet au moyen du calcul direct sur le nouvel aubage: pour conserver un point de fonctionnement identique à une vitesse d'entrée donnée W_1 : à débit égal, proportionnel à

$$\frac{\sin\beta_\infty W_\infty}{W_1}$$

il faut que la chute, proportionnelle à $\frac{C_z W_\infty}{W_1}$, reste identique, (annexe f) ce qui impose des conditions sur les variations des grandeurs ΔC_z , $\Delta(\frac{W_\infty}{W_1})$ et $\Delta\beta_\infty$

$$\Delta C_z = \frac{\frac{C_z W_1}{W_\infty}}{\Delta(\frac{W_\infty}{W_1}) + 1} \quad \text{et} \quad \Delta\beta_\infty = \frac{\frac{-\text{tg}\beta_\infty W_1}{W_\infty}}{\Delta(\frac{W_\infty}{W_1}) + 1}$$

VI.1.1. Application à un cas académique sans critère sur la portance

Avant d'aborder des applications pratiques sur des aubages de turbine ou de pompe, un exemple de calcul dans une grille de profil oignons de 10% d'épaisseur relative, tronqués à 90% et dont le bord de fuite a été arrondi, est présenté dans la figure suivante. La distribution

de pression continue représente le premier calcul direct, à partir duquel on a imposé sur l'intrados et l'extrados, une perturbation de pression. Dans la figure contiguë, l'ordonnée du profil de base a été aggrandie 20 fois par rapport à l'abscisse, le profil obtenu par perturbation est représenté par la courbe discontinue. On peut remarquer d'autre part que des valeurs nulles de ΔC_p correspondent à des valeurs locales non-nulles de $\Delta \sigma$, ce qui illustre parfaitement le caractère elliptique de la résolution. Un calcul direct est ensuite réalisé sur la grille formée des nouveaux profils, il subsiste une différence uniquement au bord d'attaque extrados, ce qui montre la rapidité de la convergence après un seul pas de calcul inverse. Il apparaît que dans les zones de fort gradient de pression, la différence entre la pression désirée et la pression obtenue est résorbée plus lentement, d'où la nécessité de travailler à une incidence réduite, lorsqu'on désire atténuer un pic de survitesse.

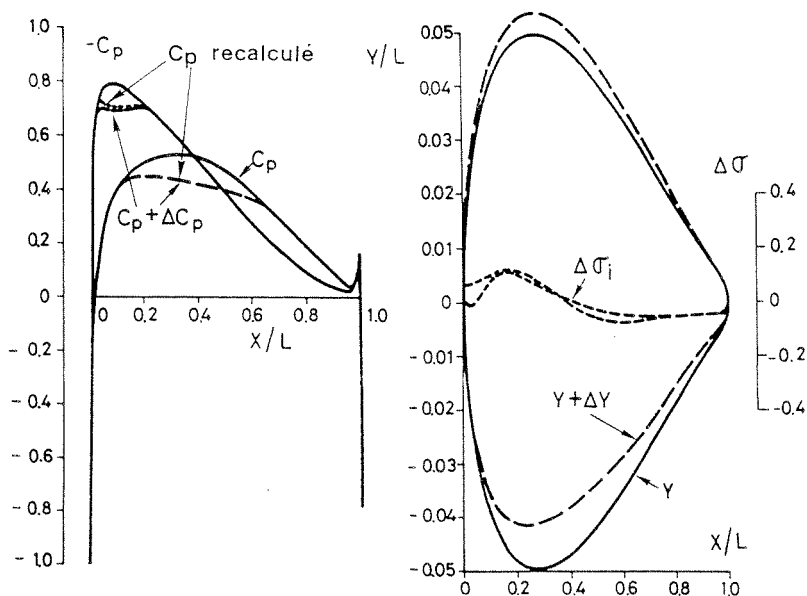


Fig. VI. 0. Calcul inverse et contrôle de la convergence dans une grille de profils oignons

VI.2. ANALYSE ET AMÉLIORATION DU COMPORTEMENT CAVITANT A L'ENTRÉE D'UNE POMPE RADIALE

L'objectif était d'améliorer l'érosion du bord d'attaque constatée sur un prototype de pompe, une première amélioration avait été réalisée sur une base empirique. En ce qui nous concerne, nous avons réalisé une analyse de cette première transformation pour vérifier la capacité de notre méthode à détecter cette amélioration et déterminer par quel paramètre on peut le mieux caractériser l'amélioration du comportement; ensuite nous avons tenté une nouvelle transformation pour abaisser encore le danger d'apparition de la poche de cavitation. L'avantage d'une telle démarche est qu'elle peut être réalisée tout à fait qualitativement, dès le moment où l'on sait que la première transformation est corroborée par le calcul.

Les hypothèses de base du calcul sont de considérer un écoulement axial à l'entrée de l'aubage: comme nous ne nous intéressons qu'à l'écoulement au bord d'attaque, la répartition de pression est calculée dans une grille droite où le pas t de la grille est le pas t à l'entrée de l'aubage.

Le paramètre servant de base à la comparaison est l'angle d'incidence de W_1 : α_1 fixé.

profils pompe

1 et 2

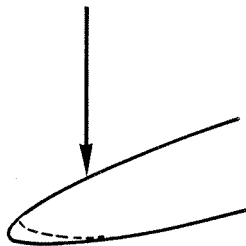


Fig. VI.1

1ère transformation: (profil 1 à profil 2) considérant les valeurs des coefficients de pression minimale au bord d'attaque $C_p = 1 - \left(\frac{W}{W_\infty}\right)^2$ obtenus par le calcul d'écoulement en grille (Fig. VI.3), on constate une diminution notable des survitesses: $\left(\frac{\Delta W}{W}\right)_{\max} > 5\%$ dans le domaine des incidences élevées correspondant à une érosion plus faible. L'analyse de la répartition de pression permet de déceler un gradient élevé de recompression derrière la survitesse du bord d'attaque, à faible incidence, qui est confirmé par de forts gradients de pression aux incidences élevées (12°). On remarque en outre une augmentation des survitesses intrados à l'autre extrémité du domaine de travail, qui reste néanmoins en dessous des limites données par la survitesse extrados.

2ème transformation: on peut atténuer l'intensité de la survitesse en imposant un pic plus épais au bord d'attaque (Fig. VI.2. droite), car nous ne sommes pas limité ici par la nécessité d'imposer une portance constante, puisqu'il s'agit d'une pompe centrifuge et que la portance du profil lui même importe moins que l'effet centrifuge.

On a représenté sur la partie de gauche l'effet de la perturbation sur le profil dont les ordonnées ont été dilatées 20 fois. Le résultat de ce calcul est une surépaisseur à l'intrados et à l'extrados. Au niveau du constructeur, la surépaisseur relative peut être négligée à partir de 20% de la corde et ceci sur les deux côtés. L'allure des $\Delta\sigma$ montre que les valeurs intrados et extrados à même abscisse sont pratiquement confondues sur une grande partie du profil sauf entre 5 et 15 %, leur valeur absolue reste inférieure à .2.

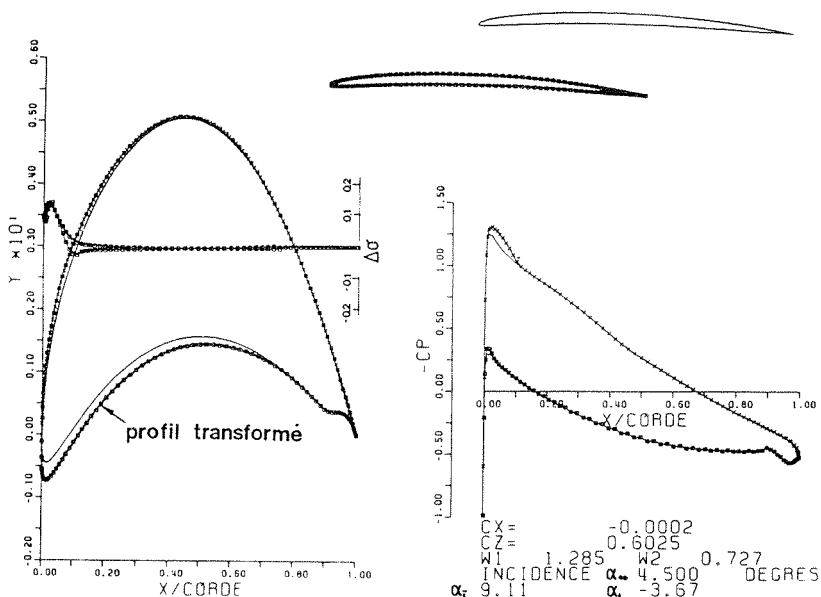


Fig VI.2. calcul inverse sur un profil de pompe

Le nouveau profil de pression présente une amélioration sensible aux incidences élevées:

$\frac{\Delta w}{w}_{\max} > 10\%$, la situation s'est détériorée sur l'intrados aux faibles incidences (Fig. VI.3.), mais le niveau de la survitesse reste dans les limites fixées par la baisse de la survitesse à l'extrados.

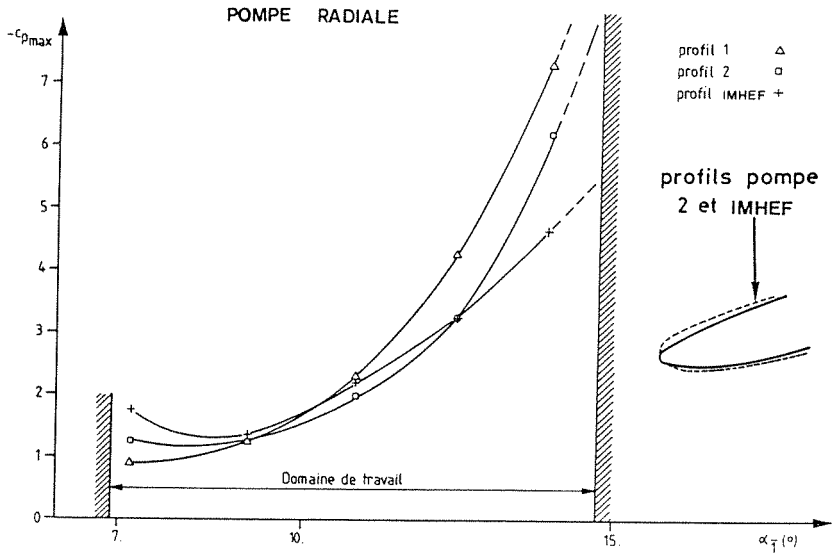


Fig. VI.3. Survitesses maximales dans le domaine de fonctionnement

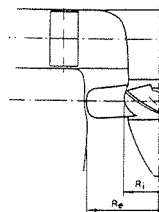
On assiste à un décalage entre la zone dangereuse extrados et un élargissement de la zone admissible de fonctionnement. Le nouveau profil présente un bord d'attaque plus épais, l'ordre de grandeur de l'épaississement intrados et celui de l'extrados sont les mêmes. Le résultat du calcul montre que les variations de singularités sont non seulement proportionnelles aux variations locales correspondantes de pression, mais aussi aux survitesses initiales, c'est pourquoi une certaine précaution doit être prise dans l'établissement des variations de pression, sans quoi les variations $\Delta\sigma$ sont localement trop élevées. On constate donc que la méthode peut être appliquée aussi au bord d'attaque d'une pompe centrifuge, pour autant que la géométrie de l'aubage ne soit pas tourmentée dans la zone où l'écoulement est axial. Enfin, le procédé est satisfaisant, même en étant qualitatif, pour autant que l'on dispose des résultats d'une première modification. Dans cette application, la variation de la portance n'a pas été considérée, puisqu'on ne s'occupe que du comportement au bord d'attaque et que les effets centrifuges qui sont prépondérants dans l'échange d'énergie ne sont ici pas pris en compte et ne sont pas modifiés par le changement de la géométrie du bord d'attaque.

VI.3. APPLICATION SUR DES ROUES DE TYPE KAPLAN

VI.3.1. Application sur 4 coupes cylindriques d'une roue

suivie de l'exécution et de mesures [37],[38]

VI.3.1.1. Calage du calcul



Nous avons appliqué cette méthode à une roue modèle de turbine Kaplan de 4 pales (rayon extérieur $R_e = 225$ mm et rayon au moyeu $R_i = 90$ mm) qui présentait une forte cavitation d'entrée à débit élevé dans une zone de fonctionnement normal. Ce type de cavitation pouvant générer, comme dans le cas de la pompe, des érosions importantes, dès lors, pour éviter cette érosion, on doit limiter le domaine d'exploitation de la machine ou l'implanter plus profondément, ce qui augmente considérablement le coût de l'installation.

La détermination des zones de l'arête d'entrée à modifier nécessite un calage du calcul direct de l'écoulement par rapport aux sondages de vitesses effectués en amont et en aval de la roue au moyen d'une sonde de vitesse à 5 trous, les visualisations et mesures ont été réalisées sur le stand d'essai des turbines Kaplan des Ateliers de Construction Mécanique de Vevey.

Le sondage a été effectué au point de fonctionnement de la colline à la chute sommet (ψ_A), et à un surdébit relatif d'environ $\phi/\phi_A = 1.3$, sur un plan méridien.

La vitesse relative $W_\infty = \frac{1}{2}(W_1 + W_1^-)$, d'angle $\beta_\infty = \beta_0 + \alpha_\infty$, choisie comme base de comparaison pour 4 coupes cylindriques est la vitesse de l'écoulement parallèle en absence de la grille, les vitesses w_1 et w_1^- calculées sont ensuite comparées aux vitesses mesurées. On constate une bonne concordance sur le rapport $\frac{w_1}{w_1^-}$ calculé et celui mesuré sur les coupes 3 et 4

proches de la couronne bien que le calcul soit effectué sans frottement. L'épaisseur relative des profils restant faible, ceci entraîne que les effets des couches limites, ainsi que les effets 3-D dûs à une alimentation non uniforme se font moins sentir que sur les coupe 2 et 1, plus proches du moyeu.

coupe	1	2	3	4
$\frac{w_1}{w_1^-}$ calculé	.665	.745	.795	.83
$\frac{w_1}{w_1^-}$ mesuré	.57	.7	.78	.84
r/R_e	.56	.67	.78	.89

Le calcul direct fournit les angles d'entrée β_1 ou de sortie β_7 de la grille. La comparaison avec les mesures montre un décalage $\Delta\beta$ constant entre l'amont et l'aval. Pour la suite du calcul d'optimisation, on prendra l'angle d'entrée calculé comme angle de référence invariant car il est lié au calage des aubes directrices. Lorsqu'on a déterminé quel est l'angle d'entrée de l'écoulement β_1 ou α_1 (dans le repère de la corde) calculé au point de fonctionnement considéré, on effectue les comparaisons ultérieures à partir de cet angle.

VI.3.1.2. Estimation du σ incipient théorique local

On détermine par rapport aux conditions d'écoulement le coefficient de pression pour lequel le danger de cavitation commence à un σ donné. L'application des relations présentées dans le chapitre IV donne à partir de C_{pmin} calculé:

coupe	1	2	3	4
σ_{inc}	1.2	1.	1.4	2.2

pour les coupes 2 à 4, les valeurs de σ_{inc} théorique correspondent bien aux σ d'apparition des premières figures sur le modèle. Celles-ci apparaissent d'abord vers la couronne pour s'étendre, quand le σ baisse, jusqu'à un point situé entre les coupes 1 et 2. La prédiction du σ d'apparition sur la coupe 1 (voir fig. VI.8) ne correspond pas à la visualisation du fait de l'écart important entre les vitesses mesurées et calculées déjà mentionné.

V.3.1.3. Modification de l'aubage

La comparaison des résultats théoriques avec les figures de cavitation observées sur le modèle a conduit à modifier l'arête d'entrée à partir de la couronne en direction du moyeu. Les limites fixées à cette modification étant d'une part la nécessité de ne pas altérer la colline de rendement et d'autre part d'éviter une cavitation intrados, il n'était évidemment pas possible de faire disparaître complètement le pic de dépression à l'entrée. D'autre part, comme le programme met en oeuvre des petites perturbations, il est nécessaire d'effectuer le calcul à une incidence plus faible que celle du point A (voir Fig. VI. 7), afin que le pic ne soit pas trop grand, de manière à pouvoir en modifier la forme tout en respectant les hypothèses de calcul.

Un exemple de calcul est présenté dans la figure VI.4.: la répartition de pression a été perturbée à l'entrée du profil, côté extrados uniquement sur une longueur relative de 10%. L'influence sur la forme du profil est visible sur la courbe contiguë, où le profil est représenté avec une ordonnée dilatée 20 fois. On remarque que la plus grosse modification est situé à

l'intrados, bien que la perturbation soit donnée sur l'extrados, ce qui illustre bien le caractère elliptique du schéma de résolution.

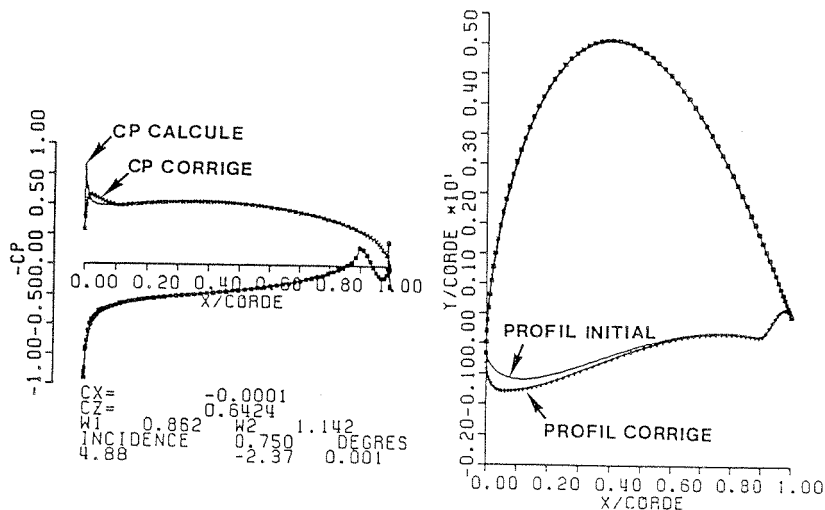


Fig. VI.4. Calcul de perturbation en grille et influence sur le bord d'attaque

Le passage des coupes 2,3 et 4 dans le programme inverse permet de dégager certaines remarques: la figure V.5. représente l'intensité du pic avant et après la modification et en fonction de deux paramètres : $\Delta L/L$ soit l'épaisseur relative du pic pour une valeur de C_p correspondant à $\sigma = .7$ (voir Chap. IV, relation (12))

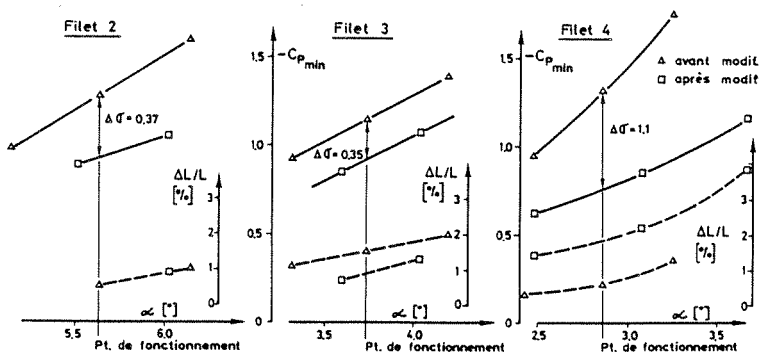


Fig. VI.5. Illustration de la valeur de $-C_{p_{\min}}$ et de l'épaisseur du pic

Les crêtes des pics de dépression ont toutes pu être diminuées, mais on remarque qu'à la plus grande diminution de $-C_{p_{\min}}$, correspondant à $\Delta\sigma = \Delta C_{p_{w_{\infty}}}^2 = 1.1$, une augmentation de l'épaisseur du pic apparaît. Pour les coupes 2 à 4, la modification est présentée sur la figure suivante, elle est maximale à la périphérie et diminue jusque vers le milieu de l'arête entre les coupes 1 et 2.

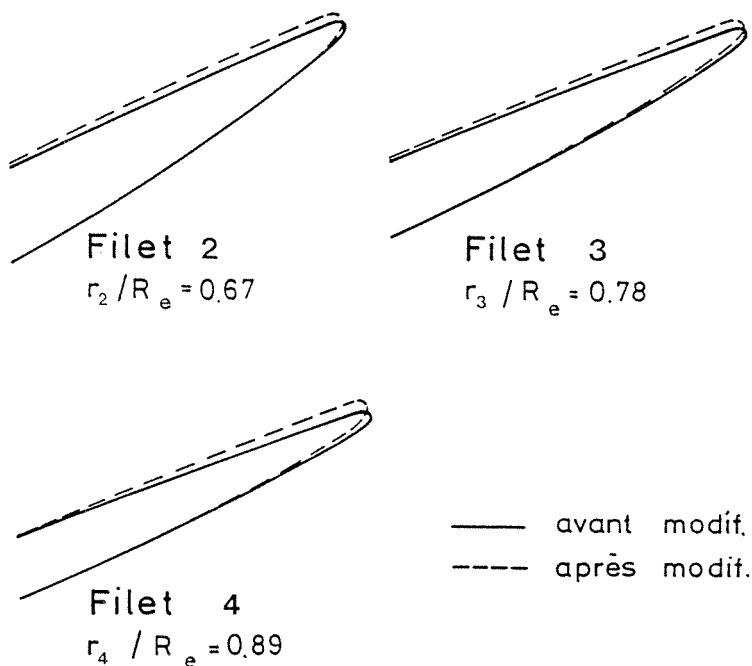


Fig. VI.6. modification de l'aubage d'entrée

VI.3.1.4. Analyse des résultats de la modification

Les effets de la modification se sont révélés correspondre très largement aux prédictions du calcul. Les résultats obtenus sur trois points de fonctionnement significatifs sont représentés ici. En plus du point A qui a servi de base à la modification, on a choisi un point B à une plus grande ouverture, où la valeur du débit est plus importante ($\varphi/\varphi_A = 1.52$) et le point C correspondant au fonctionnement à basse chute ($\psi/\psi_A = .52$).

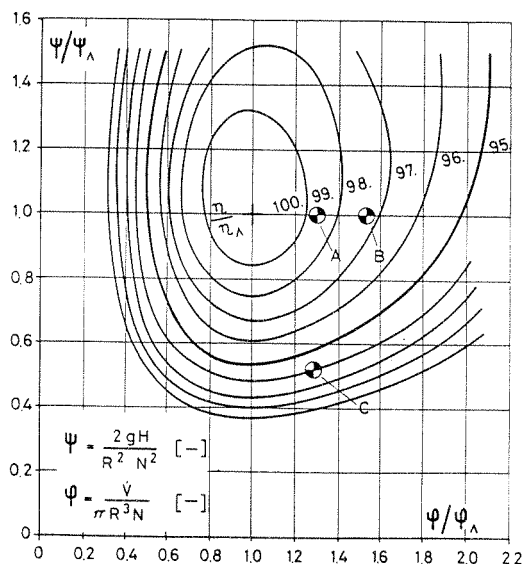


Fig VI.7. Situation, dans la colline de rendement, des points de fonctionnement étudiés

Une première remarque, qui ressort des essais sur modèle réduit est que les caractéristiques de rendement et de débit avant et après la modification présentent la même évolution en fonction du chiffre de cavitation, (voir fig. VI.8,9. et 10.) compte tenu de l'imprécision des mesures. Ce fait revêt une grande importance, car cette optimisation sur des critères de cavitation a pu être réalisée sans affecter les performances. En ce qui concerne les figures de cavitation proprement dites, visibles sur les photos, on constate aux points A et B une très nette diminution de celles-ci, consécutive à l'amélioration du profil.

Fig VI.8. Point A : influence de la modification de l'aubage sur les figures de cavitation, mesure du débit et du rendement



A11

A21

A31

avant modification



A12



A22



A32

après modification

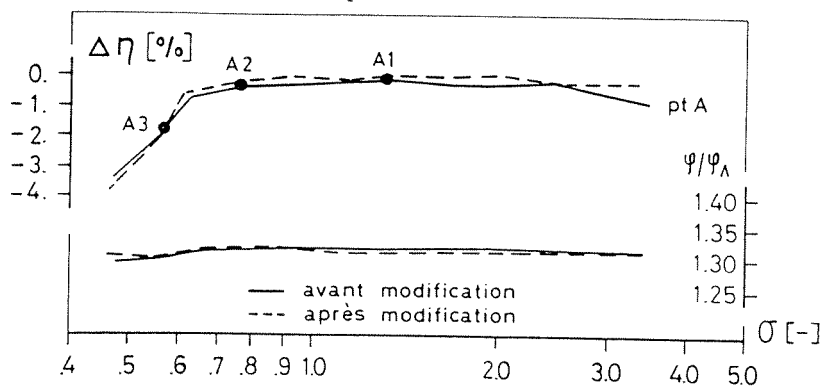


Fig VI.9. Point B : influence de la modification de l'aubage sur les
figures de cavitation, mesure du débit et du rendement

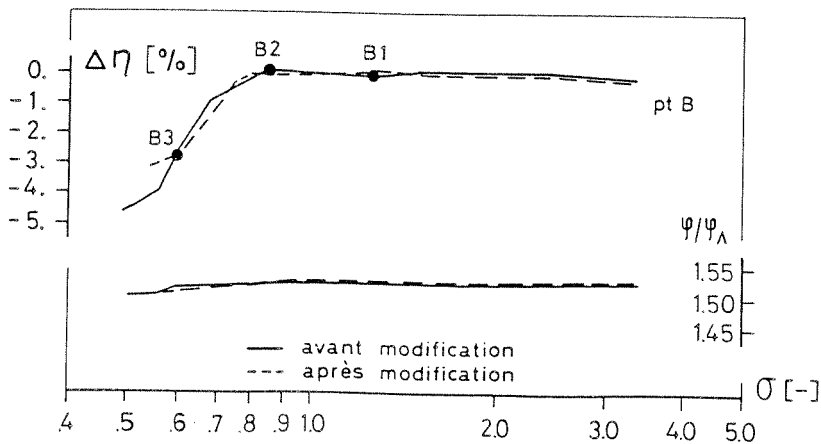
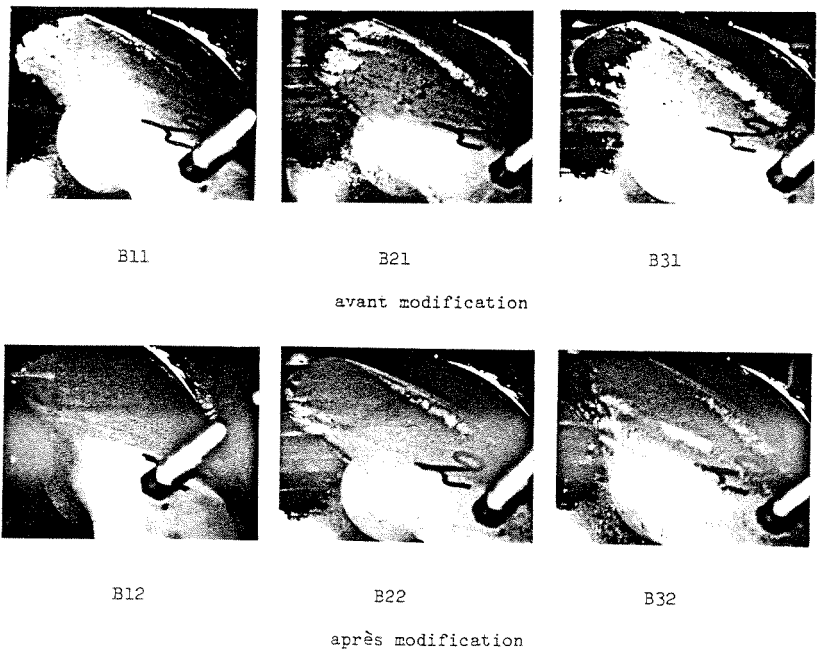
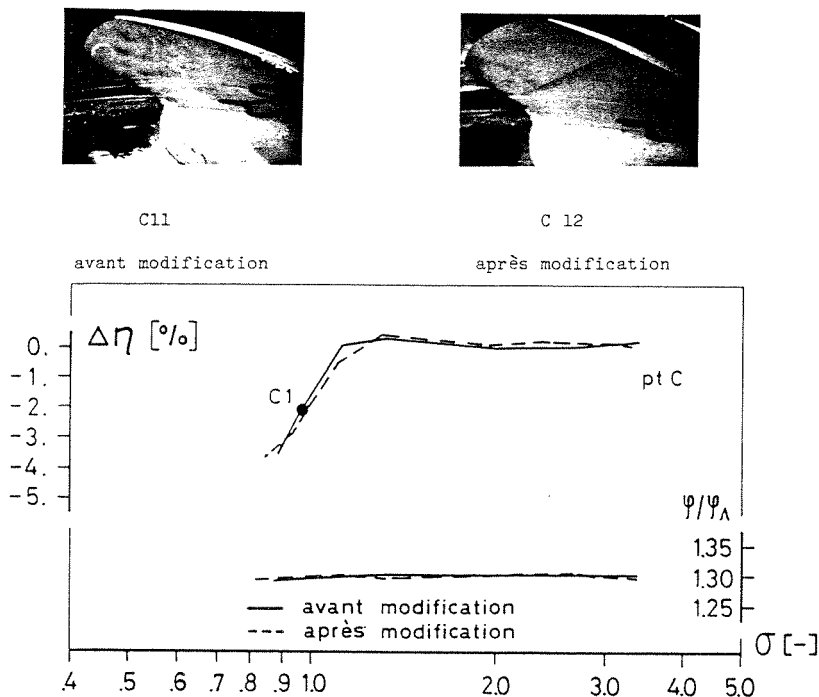


Fig VI.10. Point C : influence de la modification de l'aubage sur les figures de cavitation, mesure du débit et du rendement



Cette diminution est surtout sensible côté couronne. L'amélioration est moins marquée au fur et à mesure que l'on se rapproche du moyeu, parallèlement à la diminution en importance de la modification. Dans la zone d'arête non touchée, soit à proximité du moyeu, les figures de cavitation restent les mêmes (pt B). Au point C, représentatif d'une région où la cavitation d'entrée n'est pas prépondérante, voire inexistante, le comportement de l'aubage est resté inchangé. En particulier, on n'observe pas de cavitation côté intrados. On peut dire que le nouveau profil est beaucoup moins sensible à une variation de l'angle d'incidence. Pour tous les points observés, l'apparition de la cavitation d'entrée est fortement retardée ainsi que son développement.

Le choix du critère servant de base à la méthode de transformation de l'aubage, soit la diminution du $-C_{pmin}$ et par conséquent du gradient de pression paraît tout à fait justifié au vu de ce qui précède. On peut considérer ainsi la valeur de l'intensité du pic comme représentative du risque d'apparition et de développement de la cavitation, à condition qu'il s'agisse d'un pic caractérisé par une inversion brutale du gradient de pression.

Pour mieux quantifier le gain obtenu en ce qui concerne les performances de l'aubage dans la région du ψ_A , il est intéressant de représenter l'évolution du σ admissible en fonction de l'énergie cinétique rapportée à la chute, soit de la valeur (φ^2/ψ) . La diminution de l'écart entre la courbe représentative du σ critique et celle du σ admissible après modification y est particulièrement sensible.

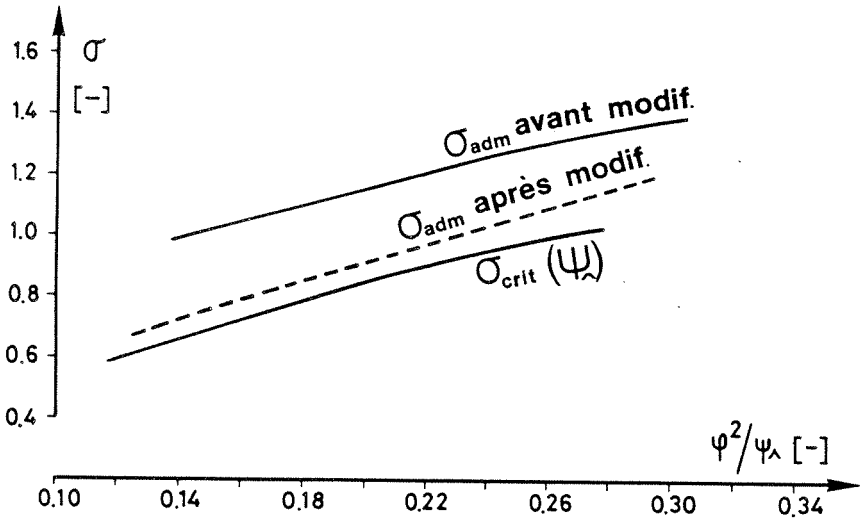


Fig. VI.11. Influence de la modification sur la valeur du $\sigma_{admissible}$

L'enseignement essentiel de ce processus de dessin des bords d'attaque pour un point de fonctionnement donné est que la réduction de pics de dépression couplée avec une augmentation de l'épaisseur du pic, schématiquement représentée dans la figure VI.5., assure des valeurs de σ d'apparition de la poche plus faibles, voire même une élimination de la cavitation dans le domaine testé. Ceci montre une grande sensibilité de la cavitation naissante non seulement au niveau des pressions, mais encore, comme présenté par Franc & Michel [28], au gradient de recompression, via la couche limite. Toutefois, les essais sur modèle

réalisés dans une gamme de nombres de Reynolds plus proches d'un caractère industriel (filet 1: $Re=2.2 \cdot 10^6$, filet 4 : $Re=3.7 \cdot 10^6$) montrent que la cavitation naissante est liée d'abord à un détachement 3-dimensionnel sur une rugosité qui s'étend ensuite à une structure 2-dimensionnelle quand le σ diminue. L'allure des poches, lisses puis ridées, ou déjà ridées dès le détachement, montre que le départ de la poche peut être situé dans la zone de transition.

V.3.2. Application sur un filet proche du moyeu

Dans le cas suivant traité, on dispose d'un aubage de type kaplan, sur lequel on étudie l'écoulement au niveau d'un coupe située dans une zone plus proche du moyeu ($R=75\text{mm}$, $Re=170\text{mm}$).

V.3.2.1. Considération des vitesses pour une ouverture donnée

Pour une ouverture considérée, on dispose des angles d'entrée β_1 et de sortie β_2 mesurés, qui permettent un comparaison avec les angles calculés à partir d'un même angle de la vitesse potentielle β_∞

Au vu du calcul initial, on peut constater déjà à faible incidence une double zone d'accélération caractérisée par un pic au bord d'attaque suivi d'une bosse entre 10 et 40% dans la répartition des pressions (Figure VI.12. $\beta_1 = 52.3^\circ$). Ce genre de répartition est évidemment propice au développement rapide de la cavitation d'entrée, puisque le pic initial apparaît à des incidences faibles, étant donné le mauvais équilibrage de la répartition de pression.

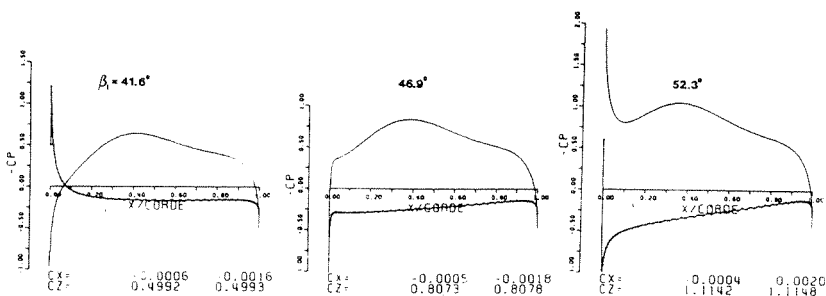


Fig. VI.12. Pics au bord d'attaque dans le domaine étudié

Le gradient de recompression entre les deux zones citées est inutilement élevé. La comparaison des triangles de vitesse a été réalisée pour trois points:

- à forte chute, la différence est très affirmée, le rapport des vitesses ayant décréu de 8%, on constate ainsi l'effet important de la couche limite, et particulièrement de son décollement, qui va décroître à plus basse chute, où la différence du rapport des vitesses accuse une valeur de 1.5%.

β_∞	38.6°	44.°	48.7°
$\beta_1(\text{calcul})$	42°	53.4°	64.5°
$\beta_1(\text{mesure})$	41.5°	56°	69°
$\frac{W_1}{W_\infty}(\text{calcul})$	1.15	1.33	1.47
$\frac{W_1}{W_\infty}(\text{mesure})$	1.13	1.41	1.59

VI.3.2.2. Modification de la distribution de pression

On se propose alors de rééquilibrer la répartition des pressions à partir d'un calcul inverse effectué dans la zone d'apparition du pic initial. On impose un rééquilibrage de la répartition de pression afin d'éviter les deux accélérations successives observées sur le calcul direct.

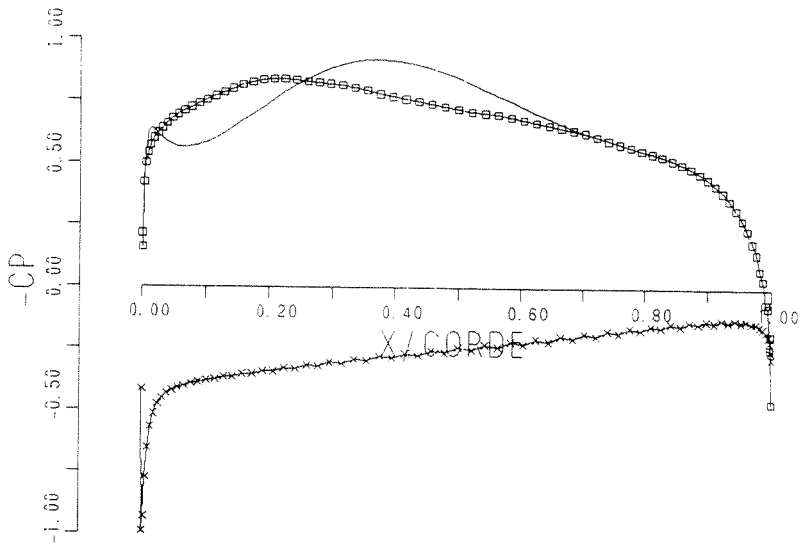


Fig. VI.13.Calcul de perturbation en grille. Répartition de pression désirée avec symboles

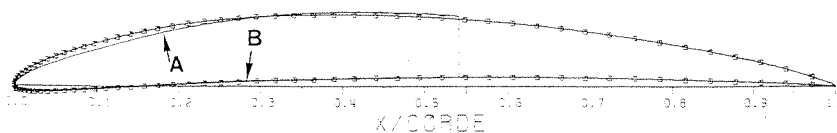


Fig. VI.14. Profil de base et profil modifié (avec symboles)

Le résultat de ce calcul inverse est illustré par la figure VI.14. où l'on voit le nouveau profil superposé au profil initial, essentiellement, le nouveau profil possède un bord d'attaque plus épais, mais l'épaisseur relative a diminué. Sur la figure suivante, (Fig. VI.15.) où différentes répartitions dans le domaine sont présentées, on remarque que l'apparition du pic de dépression a été retardée et que dès le maximum de vitesse la décélération est monotone, la zone sans risque de cavitation d'entrée est donc augmentée.

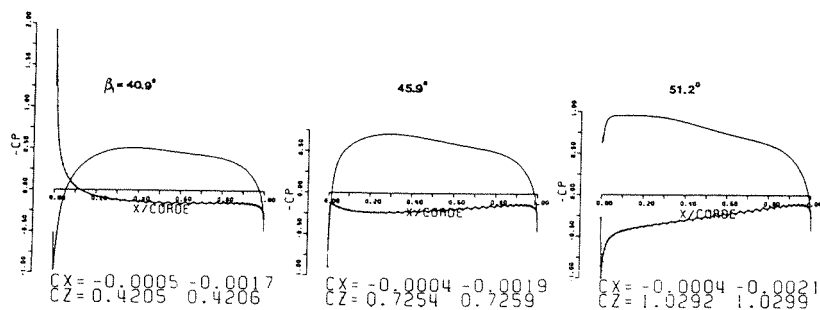


Fig. VI.15. Effet de la modification sur les pics de dépression

VI.3.2.3. Conséquences de la modification sur les performances théoriques de l'aubage

Afin de bien caractériser la gain réalisé entre le profil A et le profil B, on a procédé à un calcul des grandeurs caractéristiques de la couche limite établies au moyen du critère de décollement de Michel et de la méthode de Head [42],[43],[44]. On a représenté, dans la figure VI.16. la position relative de la transition et du décollement laminaire dans la zone où celui-ci se rapproche brusquement du bord d'attaque. On observe ainsi les améliorations suivantes, tout d'abord: la limite de la zone présentant un décollement au bord d'attaque commence à une incidence plus élevée, ainsi le risque d'existence d'une poche en domaine cavitant est retardé. On ne peut garantir l'existence d'une poche dès que le point de décollement laminaire s'est avancé jusqu'à la zone de transition, mais c'est une condition nécessaire. Le lieu de transition est d'autant plus instable qu'il est situé dans une région à fort gradient de pression, ainsi le décollement laminaire, à un régime donné, peut se situer avant la transition ou après, mais dans ce cas il n'existe plus, de telle sorte que l'apparition de la poche est liée aussi à des contraintes de nature instationnaire.

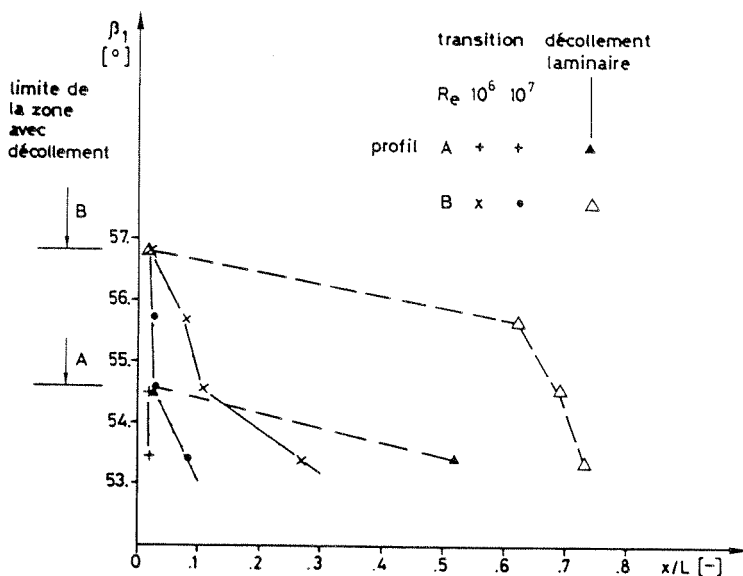


Fig. VI.16. Effet de la modification sur les caractéristiques de la couche limite à l'extrados (en incidence positive)

Secondement, on remarque hors du domaine de danger de décollement une zone laminaire élargie et par conséquent une traînée plus faible, puisque le coefficient C_f laminaire est plus faible. Ceci est particulièrement intéressant au niveau d'essais sur modèle réalisés à des nombres de Reynolds situés entre 10^6 et 10^7 . Si une telle amélioration est possible d'un aubage à un autre, la différence en rendement devient manifeste et facilite le choix de l'aubage. Par contre, cette différence ne sera plus aussi forte sur le prototype, puisqu'on se situera alors dans des nombres de Reynolds situés entre 10^7 et 10^8 .

Sur la dernière figure illustrant cette application, on a reporté les grandeurs caractéristiques adimensionnelles (voir annexe f) pouvant varier entre le profil A et le profil B, si le débit n'a pas varié, l'énergie transformée a diminué, ce qui provoque un déplacement de la caractéristique pour ce filet.

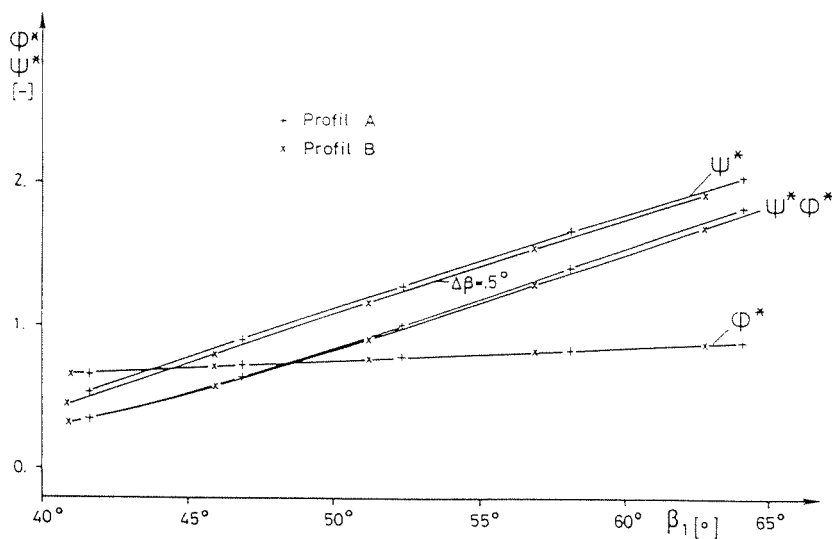


Fig VL17. Effet de la modification sur les caractéristiques de chute et de débit sans pertes

VII. APPLICATION AU CALCUL DE POCHE DE CAVITATION PARTIELLE

Des méthodes de calcul potentiel direct ont été appliquées avec succès dans le calcul de l'écoulement autour d'un profil en cavitation partielle. Ceci a été réalisé moyennant l'introduction du schéma de calcul dans un processus itératif afin de parvenir à un état de pression constante aux limites du domaine correspondant à la surface de la poche. Cette frontière est simulée par une distribution de sources constantes sur une ligne flottante de facettes rattachée au profil [32]. Ce qui est présenté dans les lignes qui suivent est une application du programme inverse à une situation identique, moyennant un blocage des pentes, puis des ordonnées du profil en dehors de la zone de la poche, sa longueur étant fixée, le chiffre de cavitation correspondant à cette longueur est ensuite approché de manière itérative.

VII.1. Adaptation du calcul inverse

Afin d'adapter le calcul inverse au calcul de poche, il faut présenter la situation au niveau des pressions au voisinage de et sur la poche. On sait tout d'abord que jusqu'au détachement de la poche, le profil est inchangé, mais le niveau des pressions, de par l'apparition de la poche en amont et par le caractère elliptique du calcul, a évolué: on peut donc dire que ΔC_p est inconnu dans cette zone 1, (voir figure VII.1.) mais que $\Delta y' = 0$. Sur la poche, le niveau des C_p est connu, puisque $-C_p = \sigma$, (zone 2). Derrière la poche, la situation est identique à celle de l'avant de la poche, les C_p ont évolué sans que le profil ne change: $\Delta y' = 0$, (zone 4).

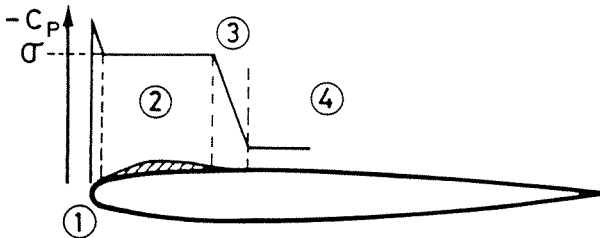


Fig. VII.1. Subdivision des domaines caractéristiques

Une incertitude réside au niveau de la fin de la poche (zone 3) en ce qui concerne la transition entre le plateau de pression à $C_p = -\sigma$ et la zone 4, car on ne connaît pas la forme du gradient. On n'a donc dans cette zone intermédiaire aucun renseignement sur le rattachement de la poche au profil et la valeur exacte des ΔC_p .

Il faut bien insister sur le fait que, dans les zones où la variation de pente $\Delta y' = 0$, on dispose encore d'un degré de liberté car $\Delta y' = 0$ donné sous forme discrète n'implique pas que $\Delta y = 0$ sur tout le segment considéré.

Le principe d'utilisation du calcul inverse dans ce cas consiste à considérer que la surface supérieure de la poche est assimilée à la paroi du profil pour une répartition de pression similaire à celle de la figure VII.1.

On va ensuite exprimer quelle va être l'influence de la condition $\Delta y'_i = 0$ dans le système de résolution des $\Delta \sigma_j$:

$$y'_i + \Delta y'_i = y'_i = \frac{Vy_i + \Delta Vy_i}{Vx_i + \Delta Vx_i} = \frac{Vy_i}{Vx_i}$$

$$\Rightarrow \Delta Vx_i y'_i = \Delta Vy_i$$

ce qui, avec l'introduction des $\Delta \sigma_j$, donne la relation

$$\sum_j (B V x_{ij} y'_i - B V y_{ij}) \Delta \sigma_j = 0$$

Il va de soi que le système à n inconnues $\Delta \sigma_j$ composé uniquement par n expressions de ce type est trivial, tous les $\Delta \sigma_j$ seraient nuls. Cette relation ne peut être utilisée que $n-p$ fois en combinaison avec la relation :

$$2Vx_i \sum_j (B V x_{ij} + B V y_{ij} y'_i) \Delta \sigma_j = -\Delta C p_j$$

utilisée p fois.

Après résolution du système linéaire des $\Delta \sigma_i$, puis des $\Delta y'_i$ au niveau de la poche et conformément à la remarque concernant le degré de liberté de la forme du profil, il faut encore

fixer la valeur de y de part et d'autre de la poche, à la limite des zones 1 et 2 et des zones 3 et 4.

Examinons de plus près la fermeture de la poche: on discerne une zone où le jet (ou ligne de courant) partant de la poche rejoint le profil, puis une zone sur le profil où la pression va retrouver la valeur correspondant au cas sub-cavitant. Dans une telle configuration, la décélération est forte puisque on peut établir l'analogie avec un écoulement potentiel dans un coin d'angle inférieur à π où la vitesse est nulle. On assiste donc à une phase de décélération-accélération derrière la poche avant de rejoindre le niveau sub-cavitant. Ce qui, transposé à un écoulement visqueux, correspond à une phase de détachement-attachement de la couche limite et formation d'une zone morte.

VII.2. Application à un profil monté en veine

Ce schéma est ensuite appliqué au cas d'un profil partiellement cavitant, monté en veine, afin que les calculs puissent être comparés aux mesures effectuées sur le tunnel hydrodynamique de l'IMHEF. Afin de simuler l'effet des parois horizontales de la veine, on dispose des sources le long des parois finies du tunnel d'une longueur équivalente à 5 cordes.

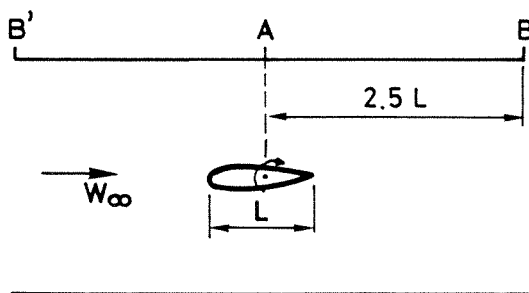


Fig. VII.2. Situation du profil dans la veine

La concentration des facettes est forte vers A et diminue de part et d'autre direction B et B'. On applique simultanément les conditions de glissement aussi bien le long des parois que autour du profil, de telle sorte que le système de résolution prend l'allure suivante:

$$\begin{pmatrix} \text{influence du profil} & \text{influence des parois} \\ \text{sur lui-même (A)} & \text{sur le profil (B)} \\ \text{influence du profil} & \text{influence des parois} \\ \text{sur les parois (C)} & \text{sur elles-mêmes (D)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{\text{profil}} \\ \sigma_{\text{parois}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{conditions} \\ \text{de glissement} \\ \text{sur le profil} \\ \text{conditions} \\ \text{de glissement} \\ \text{sur les parois} \end{pmatrix}$$

Les sous-matrices A et D sont indépendantes de l'incidence, contrairement aux sous-matrices B et C.

VII.2.1. Validation hors cavitation

Pour valider la méthode de calcul sur un profil NACA 009-7.38 45/1.95 (Annexe E) tronqué à 90% (son épaisseur relative étant donc de $9/90 = 10\%$), placé dans une veine de section carrée et de hauteur égale à 1.5 corde, nous avons tout d'abord effectué des mesures de pression au moyen d'un capteur différentiel. Ce capteur est relié par l'intermédiaire d'un scanivalve aux prises de pression percées dans le profil, 19 orifices situés chaque fois le long de 3 cordes centrales, espacées de 5mm, ont été exécutés, de telle sorte que chaque valeur mesurée est une moyenne des 3 prises situées à la même abscisse.

Les observations des figures de cavitation montrent que le caractère bi-dimensionnel de l'écoulement est assurée sur 95 % de la largeur de la veine.

Bien que le calcul potentiel tienne compte de l'effet des parois (courbure des lignes de courant), il faut néanmoins superposer une correction supplémentaire due à la présence de la couche limite sur le pourtour de la veine qui a pour conséquence une accélération locale moyenne de la vitesse amont par un effet de blocage. D'après la relation de Young et Squire [42]:

$$\frac{\Delta W}{W_{\infty}} = 0.62 \frac{\text{Volume du modèle}}{h^2 L}$$

où h et L sont respectivement la hauteur et le largeur de la veine, on obtient avec ce modèle, une correction de la vitesse de 2,2%, il s'agit donc du facteur d'augmentation de la vitesse infini amont dû au "rétrécissement" de la veine. Si on corrige cet effet au niveau du calcul potentiel, on retranche alors ce facteur à la vitesse infini amont.

En écoulement sub-cavitant, la comparaison entre le calcul et la mesure est excellente jusqu'à une incidence de 4° et 90 % de la corde, les effets visqueux dûs au sillage sur le bord de fuite très épais n'étant évidemment pas pris en compte dans le calcul potentiel, les valeurs sont différentes au bord de fuite, bien que le nombre de Reynolds soit élevé. On a même constaté une accélération entre 90 et 100% à 0° d'incidence d'après le point de mesure au culot.

Cette validation du calcul potentiel entre parois en sub -cavitant permet donc un calage pour des comparaisons en écoulement cavitant.

Le profil testé possède un culot très épais, (37% de l'épaisseur maximale) aussi faut-il adapter la condition de Kutta de telle sorte que les courbes de pression se rapprochent au bord de fuite pour se caler au mieux sur l'écoulement réel tout en conservant un degré de liberté.

Le profil étant symétrique, il n'y a pas lieu d'appliquer une telle condition lors du premier calcul direct, par contre l'asymétrie provoquée par l'apparition de la poche dès la première itération nécessite l'application d'une condition forte. On stipule que les modules de la vitesse de part (extrados: indice 1) et d'autre (intrados: indice 2) du bord de fuite sont égaux:

$$\frac{V_{x_1}}{\cos \alpha_1} = \frac{V_{x_2}}{\cos \alpha_2} = |W_{\text{bord de fuite}}|$$

α étant l'angle local de la surface du profil. Cette condition remplace la condition de tangence $\frac{V_{y_2}}{V_{x_2}} = \tan \alpha_2$, en laissant donc un degré de liberté à V_y , ce qui est acceptable pour un angle α petit.

INCIDENCE NULLE

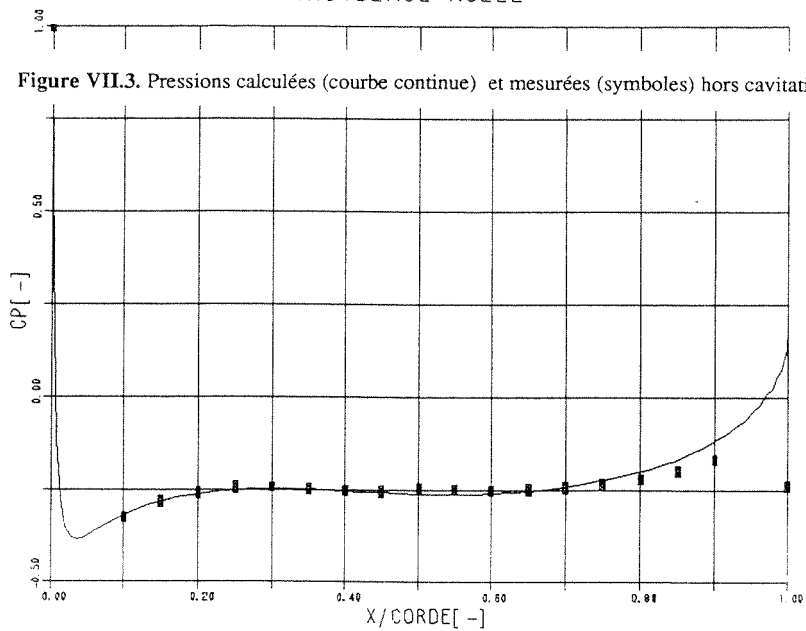
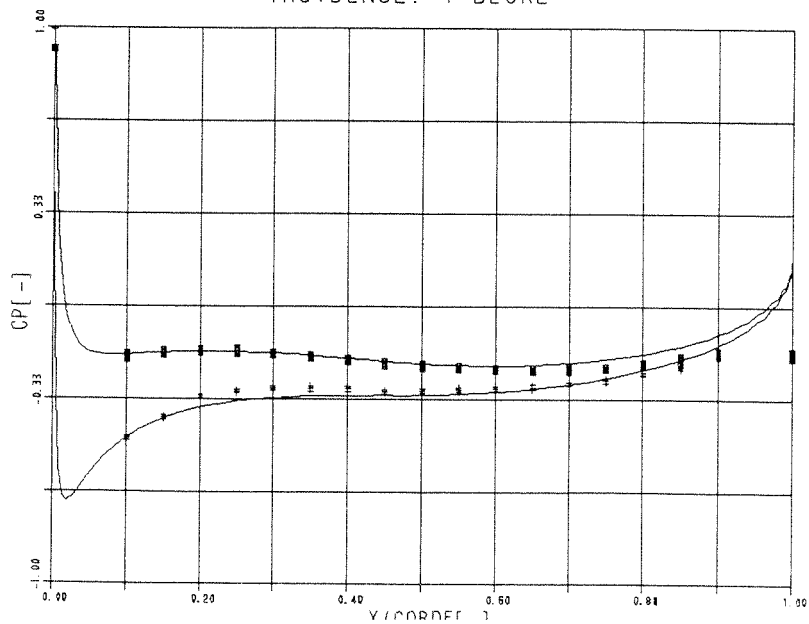
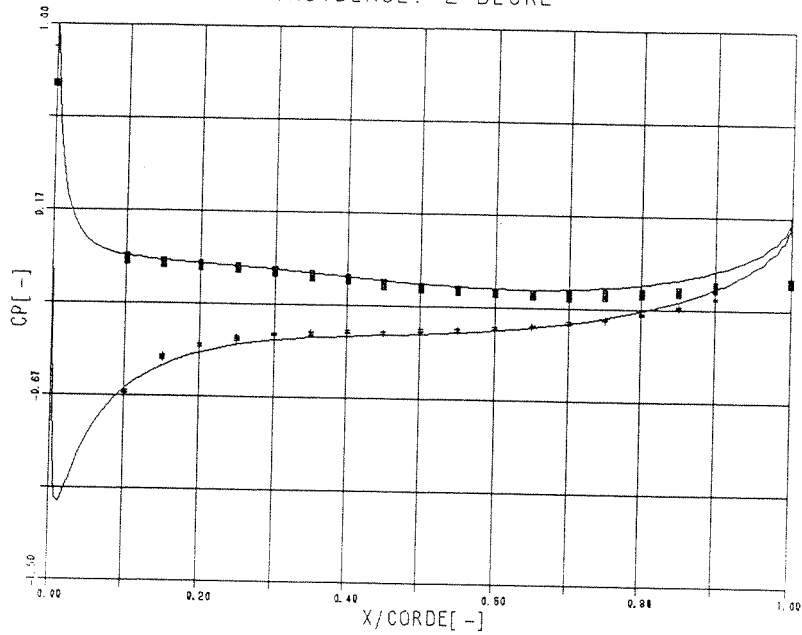


Figure VII.3. Pressions calculées (courbe continue) et mesurées (symboles) hors cavitation

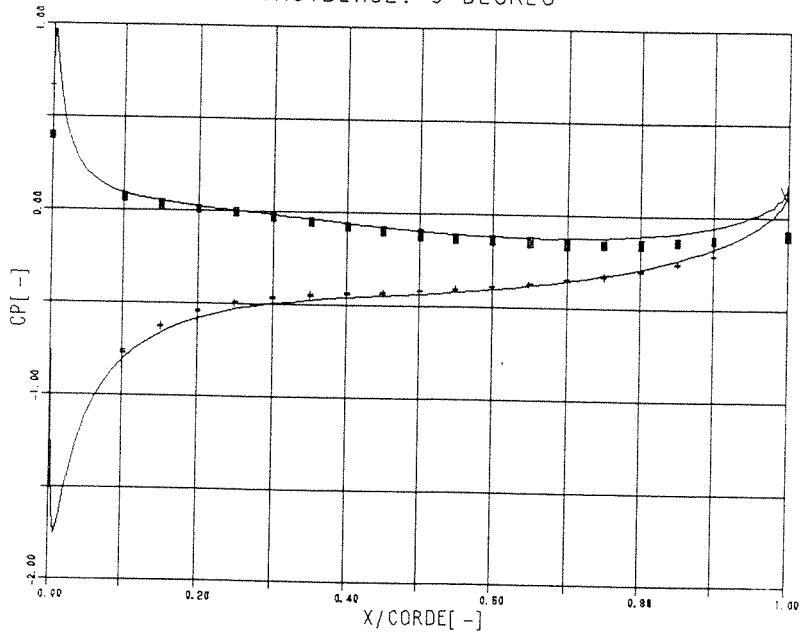
INCIDENCE: 1 DEGRE



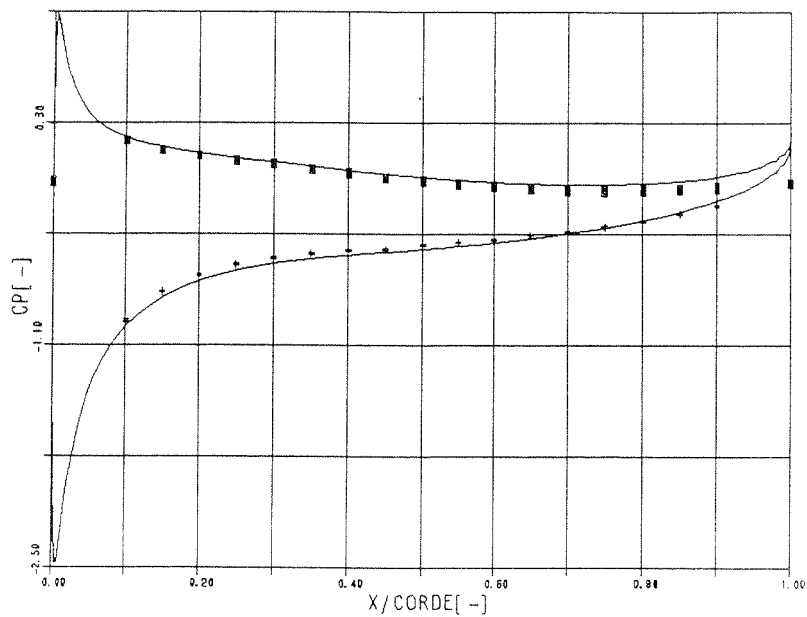
INCIDENCE: 2 DEGRE



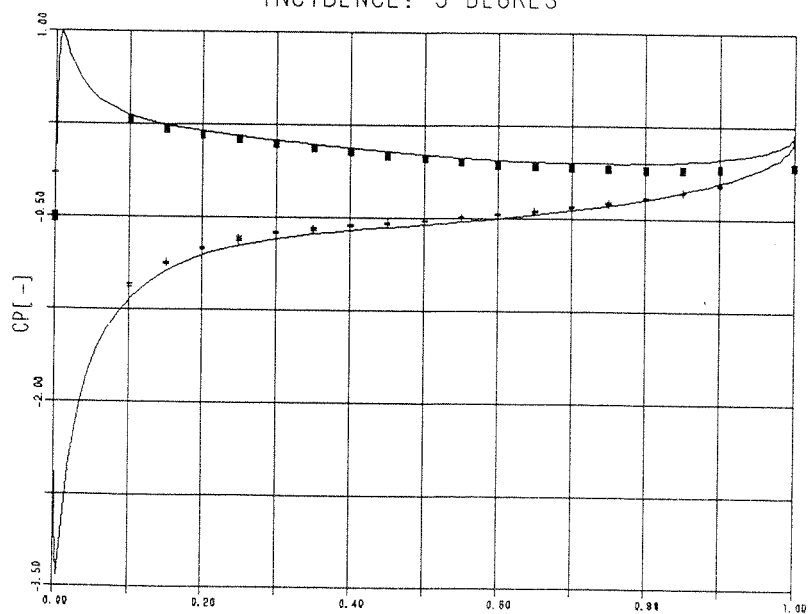
INCIDENCE: 3 DEGRES



INCIDENCE: 4 DEGRES



INCIDENCE: 5 DEGRES



VII.2.2. Calcul de la poche et comparaison avec les mesures

Le calcul inverse proprement dit est effectué à partir du calcul direct. L'influence des parois, présente dans le calcul inverse par l'intermédiaire des vitesses V_x et V_y issues du calcul direct n'est pas prise en compte dans le calcul des coefficients BV_x et BV_y pour le calcul inverse. Cette approximation est justifiée dans la mesure où l'on n'impose aucune variation de pression sur les parois.

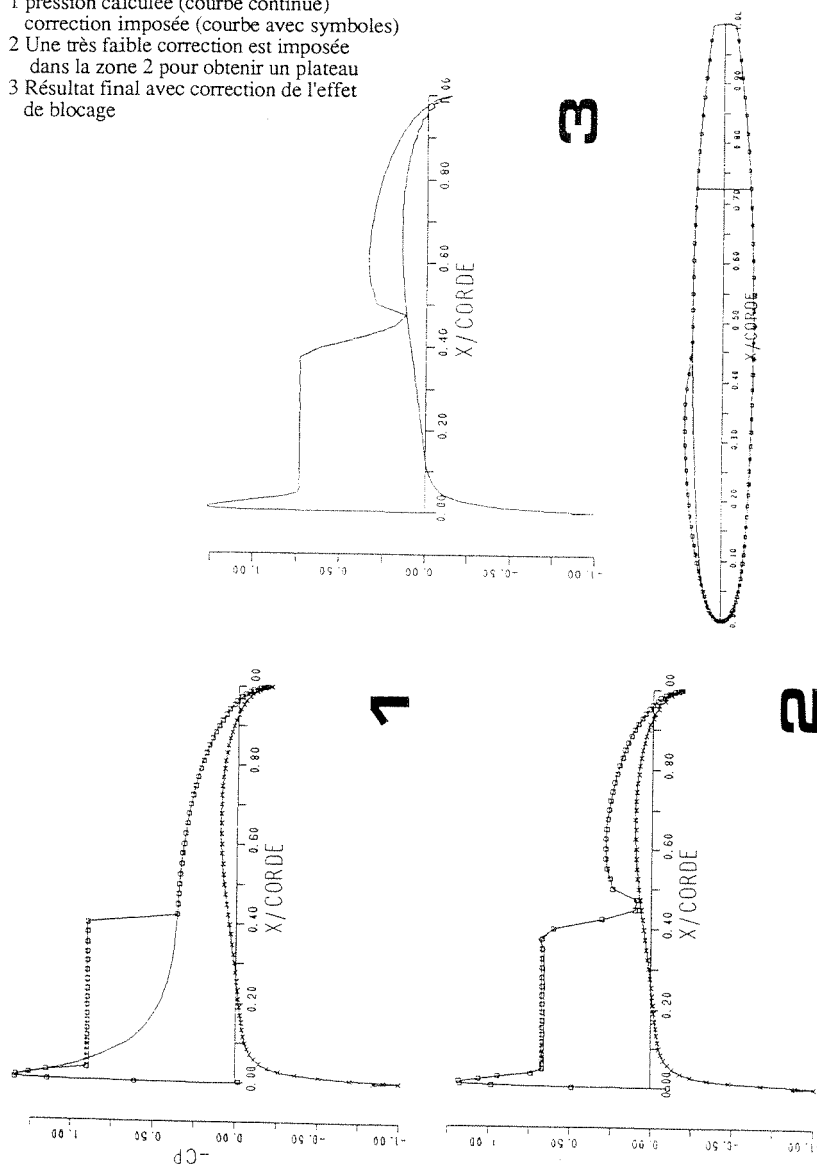
Pour une longueur de plateau de pression fixée, on impose en dehors de la poche un blocage des pentes. Il est préférable de partir d'une configuration minimale de poche, c'est à dire correspondant à la longueur du plateau, augmentée d'un panneau en amont et de trois panneaux en aval (la longueur de ce sillage minimal varie entre 6 et 8 % de la corde) sur l'extrados, quitte à débloquent un à deux panneaux supplémentaires lors des pas de calcul ultérieurs, plutôt que de vouloir diminuer en cours de calcul la longueur effective de la poche.. En fait, ce processus revient à laisser la poche se gonfler. On peut néanmoins préciser que pour tous les calculs de poche effectués, l'augmentation de la longueur fut rarement nécessaire.

Un processus de calcul de poche en 2 pas est présenté dans la figure VII.4. à l'incidence 2.5° . Le profil est libre de $x = 2.5\%$ à 47.5% (pas n° 1) et le plateau à $C_p = -\sigma$ est imposé jusqu'à 40% . Au deuxième pas, on n'impose le plateau que jusqu'à 37.5% pour atténuer la pointe d'accélération visible à cet endroit., la forme du profil étant toujours libre entre 2.5 et 47.5% . Lors du dernier calcul direct (n° 3), les vitesses ont été corrigées de l'effet de blocage identique au calcul sub-cavitant, de telle sorte que le niveau du plateau est plus haut qu'au pas précédent. Il est très intéressant de constater que dès le premier pas, le plateau va se stabiliser à un certain niveau, quel que soit le niveau imposé au départ, il est préférable de partir d'un σ plus élevé que le σ pressenti afin que le profil ne se creuse pas! Il reste ensuite à obtenir un plateau stabilisé, à savoir éliminer les oscillations éventuelles. La valeur du σ obtenu lors du dernier calcul direct (3) est 0.73 .

Au point d'abscisse correspondant à la fin du plateau (zone 2), la dérivée y' est connue, en arrière de ce point et jusqu'au début de la zone 4, on se contente de laisser le profil libre au moment de l'intégration en n'imposant que des conditions sur les limites. Les ordonnées sont intégrées depuis le début de la poche jusqu'à la fin de plateau et pour relier la zone 2 à la zone 4, on utilise une cubique (Annexe g). On peut soit imposer une répartition linéaire de C_p ou bien un ΔC_p nul dans la zone 3, de toutes façons, les pentes calculées dans cette zone ne sont pas prises en compte lors de l'intégration.

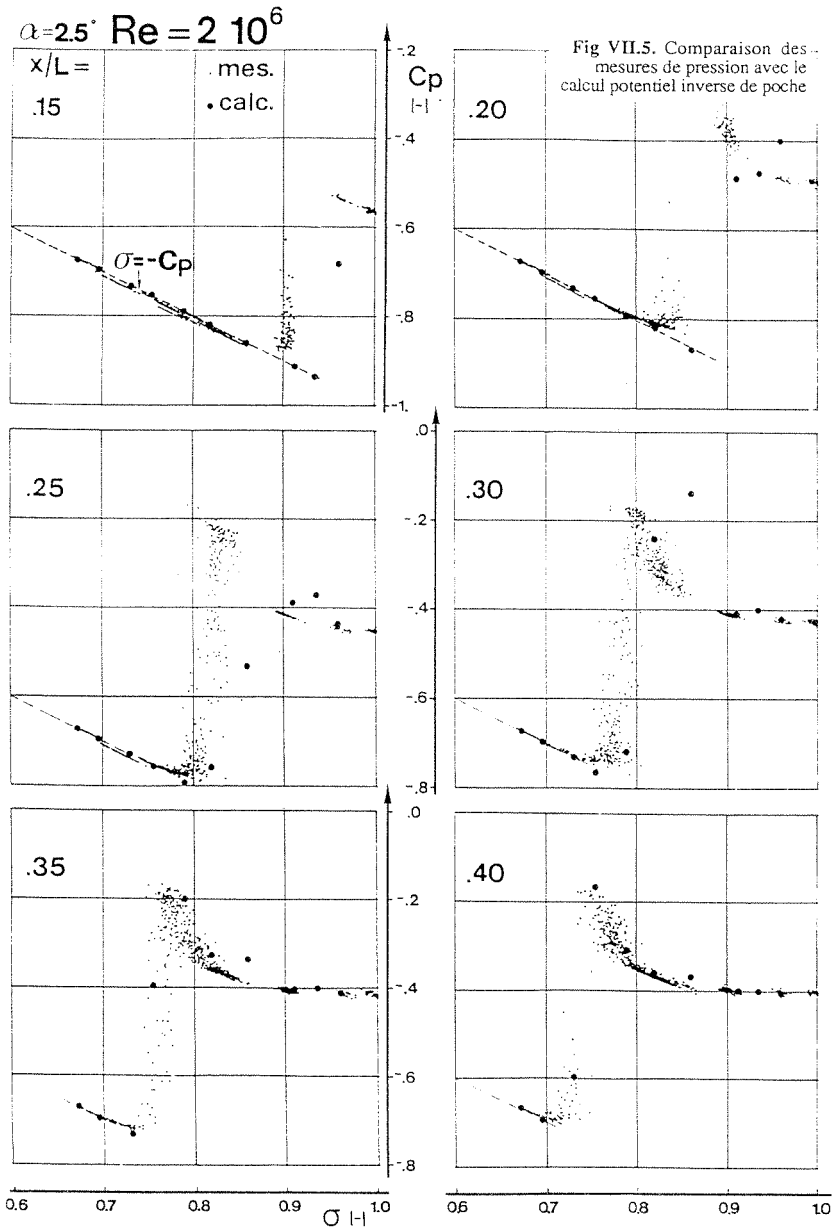
Figure VII.4 processus de calcul d'une poche de cavitation partielle à l'incidence 2.5°

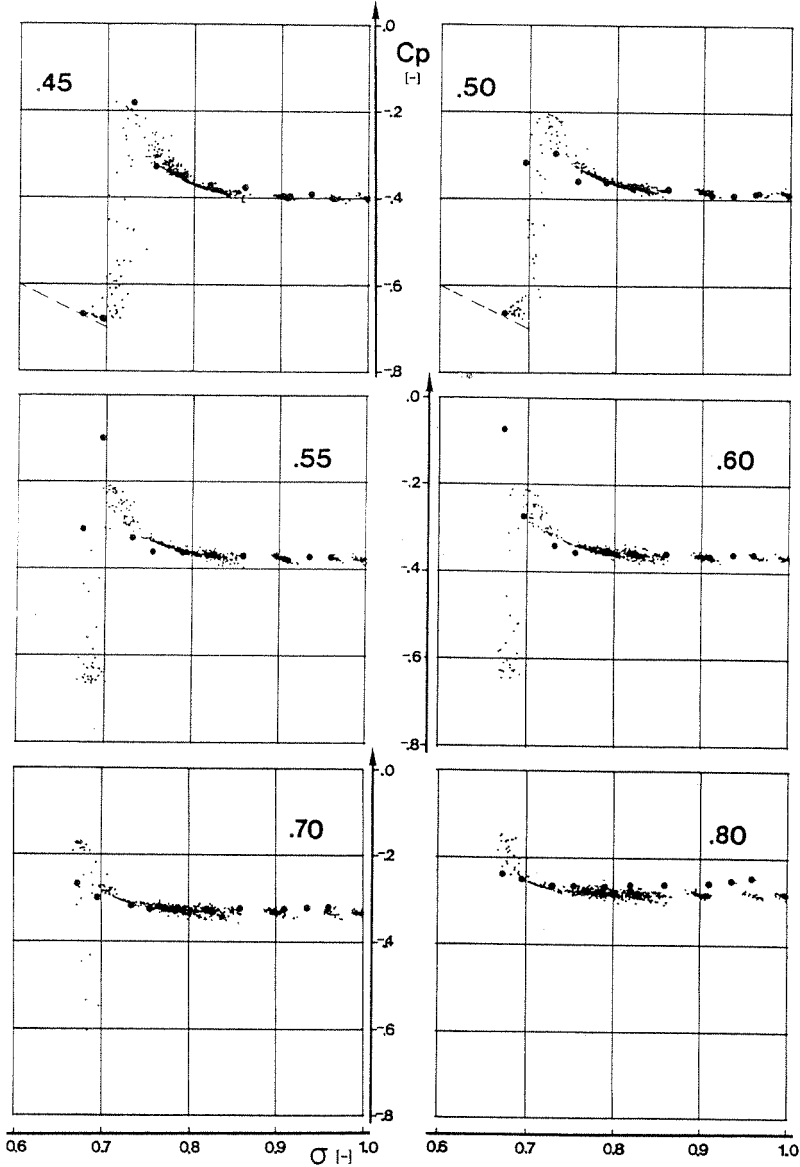
- 1 pression calculée (courbe continue)
correction imposée (courbe avec symboles)
- 2 Une très faible correction est imposée
dans la zone 2 pour obtenir un plateau
- 3 Résultat final avec correction de l'effet
de blocage



Au bord de fuite, l'état de l'écoulement n'est pas affecté par la présence de la poche, on a remarqué que, si les courbes de pression intrados et extrados en cavitation partielle s'écartaient des valeurs obtenues en sub cavitant, cela signifiait que le niveau de pression imposé à partir du deuxième pas ne correspondait pas à la longueur de poche fixée et qu'on ne convergerait pas vers la solution. En outre, les mesures de C_p au bord de fuite avec et sans poche au bord d'attaque n'ont montré pratiquement aucune variation. C'est à dire que, même si les valeurs calculées et mesurées diffèrent hors cavitation, cette différence doit subsister en cavitation partielle pour que la comparaison soit possible. Ceci nous amène, en calcul potentiel et avec un sillage minimal à une seule solution acceptable, la longueur du plateau étant fixée par le niveau du chiffre adimensionnel $\sigma = -C_p$, .

Une comparaison de cette méthode de calcul avec des mesures de pression à $Re = 2 \cdot 10^6$ sur le profil NACA en cavitation partielle a été réalisée (Figure VII.5). Une comparaison, au niveau du sillage est possible pour autant que le gradient de pression soit négligeable à travers ce sillage, car les mesures sont effectuées à la surface du profil et les calculs sur le profil déformé. A titre indicatif, l'influence de la turbulence, de la viscosité et de la tension superficielle n'a pas été étudiée, mais leur effet sur la longueur du plateau et du sillage de la poche est clair (voir chapitre IV), Etant donné la forte fluctuation de la longueur de la poche et de la valeur du σ pendant la mesure, nous avons choisi de présenter la comparaison des pressions mesurées et calculées non pas le long de la corde, mais à chaque station et en faisant varier le chiffre de cavitation, de telle sorte qu'on dispose d'une suite de valeurs dans tout le domaine qui permet d'interpoler les valeurs nous intéressant, d'autant plus que, au départ du calcul, on ne sait pas à quel chiffre de cavitation on va se stabiliser et qu'il est difficile en outre de fixer la mesure sur un chiffre σ donné. Au niveau des petites poches qui s'arrêtent entre 15 et 20%, pour des σ situés entre 0.9 et 1., le calcul livre des poches plus longues que les poches mesurées à σ égal. La différence s'atténue lorsqu'on diminue le σ ($< .8$), les effets des forces de viscosité et de tension superficielle, alliés à ceux de la turbulence et des vortex cavitant, ont tendance à s'annuler. Une comparaison à des σ plus faibles ($< .65$) n'est pas possible à cause des fluctuations de la poche dans cette zone, mais on constate déjà d'après les figures aux abscisses .70 et .80 une inversion de la tendance, les poches calculées seraient alors plus courtes. Sachant qu'une augmentation du nombre de Reynolds a pour conséquence un allongement de la poche, on pourrait en déduire que la viscosité prime sur les autres effets dans le cas de petites poches, mais à supposer que la viscosité soit nulle, le nombre Reynolds est infini et la poche serait maximale, ce qui ne correspondrait pas aux résultats du calcul potentiel . Il semble donc que ce sont plutôt les effets de la turbulence et des vortex cavitant qui provoquent donc l'allongement de la poche. Cet exemple montre ainsi la validité et la souplesse de l'adaptation du calcul inverse à ce genre de modélisation, qui devrait être complétée par l'adjonction des effets cités plus haut.





VIII. CONCLUSIONS

Un concept de résolution originale du problème inverse a été développé, la validité de ce concept a ensuite été démontrée par quelques applications dans un écoulement autour d'un profil isolé ou en grille. L'amélioration des caractéristiques de ces profils peut aussi bien être effectuée par l'imposition d'une nouvelle répartition de pression sur la base de critères concernant la qualité de la couche limite, la propension à la formation d'une poche de cavitation attachée, la capacité du profil au transfert de puissance, ceci aussi bien pour une zone de fonctionnement que pour un seul point. Il a été très intéressant, dans le cas de la modification de la roue Kaplan, de voir le progrès spectaculaire obtenu en une seule étape, conduisant toutefois à une modification relativement grande. Une modification de nature empirique n'aurait pu être exécutée qu'en plusieurs étapes, d'où l'intérêt du gain de temps et d'essai.

Il est bien clair que le nombre d'applications peut être étendu selon d'autres critères propres à chaque utilisateur, le problème principal résidant alors dans le choix de l'incidence de travail et l'élaboration d'une correction de pression à la fois suffisante quant aux exigences, admissible pour le calcul et physiquement plausible.

Nous n'avons pas rencontré, au cours des différents essais de la méthode, de restriction quant à l'épaisseur des profils, les épaisseurs relatives rencontrées s'étalant de 3 à 13 %. Généralement, l'optimisation pour des critères liés à la cavitation à poche tend vers l'augmentation de l'épaisseur au bord d'attaque sans changement de l'épaisseur relative du profil. On peut sans aucun doute corréler l'évolution rapide du rayon de courbure à partir d'une valeur faible (5-10% de l'épaisseur relative) au bord d'attaque avec une sensibilité moindre aux variations d'incidence.

L'application du calcul inverse à la détermination de poche de cavitation partielle a permis de dégager d'intéressantes constatations: en premier lieu, le code de calcul supporte des

adaptations sans perturbation du système de résolution. En outre, les perturbations de pression imposées peuvent être de l'ordre de grandeur de la pression dynamique, sans que cela perturbe le système, surtout dans le cas de longues poches, par conséquent la convergence rapide de la solution montre la validité des hypothèses admises pour introduire la linéarisation du schéma de résolution.

D'autre part au niveau de la théorie potentielle, il n'existe qu'une solution de poche pour un niveau de cavitation fixé, et ceci en accord avec la condition de Kutta, qui doit être traitée comme un invariant dans l'étude d'un profil partiellement et sub-cavitant.

PERSPECTIVES

La validité du concept de calcul inverse par perturbation d'une méthode de panneaux bi-dimensionnelle ayant été démontrée par ces quelques exemples, il est maintenant possible de songer à l'extension de cette méthode à la troisième dimension. En effet, dans un écoulement tri-dimensionnel et à partir des mêmes hypothèses, on pourrait calculer la variation des 3 composantes de la vitesse ΔV_x , ΔV_y et ΔV_z , pour former ensuite les pentes de la nouvelle surface ($F(x,y,z) = 0$) dans 2 plans perpendiculaires $\frac{V_z}{V_y}$ et $\frac{V_z}{V_x}$, surface qui pourrait ensuite être intégrée sur un domaine de définition dans le plan xy de façon analogue au cas bi-dimensionnel.

- [1] Traupel : "Die Berechnung der Stroemung durch Schaufelgitter"
Sulzer Tech. Rundschau 1, 25(1945)
- [2] Otsuka : "Method of designing lattice wing profile with prescribed velocity ditribution",
Transp. Tech res. inst. Tokyo rep 16(1955)
- [3] Simonov: "Constr. of profiles by means of a velocity hodograph"
Proc. USSR Acad. sc. vol 5 n°2(1941)
- [4] Chang : "Anwendung der Blasiusischen Satze fuer Auftrieb und Momente auf Profile in
Gitterstellung". Thesis TH Berlin (1938)
- [5] Lighthill : "A mathematical method of cascad design" ARC R&M 2104(1945)
- [6] Legendre : "Calcul d'un profil ou d'une grille de profils pour une distribution de vitesses
donnée en fonction d'un potentiel" Recherche aérospatiale (1972-1974)
- [7] Lecomte : "Calculation of cascade profile from the velocity distribution"
ASME paper 74-GT-70(1974)
- [8] Cantrell : " The aerod. design of 2-dim turbine cascade for incompr. flow with high speed
computer" Trans ASME j. basic eng.81,3,349(1959)
- [9] Schwering: "Design of cascade for incomp. plane potential flow with prescribed velocity
distribution" ASME paper 70-GT-87(1970)
- [10] Ribaut & Martin : "A quasi 3-D inverse design method using source and vortex integral
equations", Proc. of the int. conf. on inverse design concept in eng. science,
Austin 1984
- [11] Schmidt & Berger : "Inverse design of supercr. nozzle and cascade",
Proc. of the int. conf. on inverse design concept in eng. science, Austin
1984
- [12] Lewis : " Method fort-inverse aerofoil and cascade design by surface vorticity".
ASME paper 82-GT-154(1982)

- [13] Schilling, Liess, Weidtmann, Sternick : " Prediction of kaplan turbine cavitation by finite differences and singularity method "
Proc. of the IARH Symposium (Stirling 1984)
- [14] Robinson & Laurmann : "Wing theory", University press, Cambridge (1956)
- [15] I. L. Ryhming : "Mécanique des fluides", Presses Polyt. Romandes (1985)
- [16] Comolet : "Mecanique expérimentale des fluides", tome II, Masson (1982)
- [17] H. Lamb : "Hydrodynamics", University press, Cambridge (1932)
- [18] P. Henrici & R. Jeltsch : "Komplexe Analysis für Ingenieure I & II",
Birkhaeuser (1977) & (1980)
- [19] J. Bass : "Cours de mathématiques" (tomes I,II), Masson (1978)
- [20] Arbenz & P. Wolhauser : "Variables complexes", Presses Polytechniques Romandes
(1982)
- [21] L. E. Eriksson : " Calculation of 2-dim pot. flow wall interference for multi component
airfoil in closed low speed wind tunnel" FFA Techn. note AU-1116 (1975)
- [22] B. Hunt : "The panel method for subsonic aerodynamic flows " VKI lecture series
1978-4
- [23] Gostelow : "Cascade aerodynamics", Pergamon (1984)
- [24] N. Scholz : "Aerodynamik der Schaufelgitter" , Braun (1965)
- [25] W. Schlichting : " Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein
vorgegebenes ebenes Schaufelgitter" VDI Heft 447 (1955)
- [26] F. Riegels : "Aerodynamische Profile", Oldenburg (1958)
- [27] I. Abbott & A. von Doenhoff : "Theory of wing sections", Mac Graw Hill (1949)
& Dover (1959)
- [28] P. Henry : "La cavitation dans les mach. hydrauliques", IMH,EPFL (1983)
(partie d'un traité sur la cavitation à paraître sous les auspices de l'AI RH)

- [29] J.-P. Franc & J.-M. Michel : "Attached cavitation and boudary layer, experimental investigation and numerical traitement", JFM vol 154 (1985)
- [30] G. Kuiper : "Some experiments with specific types of cavitation on ship propeller" JFE, ASME vol 104 (1982)
- [31] Villat : "Sur la validité de certains problèmes d'hydrodynamique" Journal de math. pures et appliquées vol 6 (1914)
- [32] C. Pellone : "Calcul de l'écoulement autour des structures minces par la méthode des singularités" Thèse INP Grenoble (1985)
- [33] Savage : "Cavitation in lubrication, Part I: on boundary conditions and cavity fluid interface" JFM vol 80 part 4 (1977)
- [34] R.T. Knapp : " Investigation of the mechanics of cavitation and cavitation damage" Caltech, Hydrodyn. Lab. Rep. (1957)
- [35] F.Avellan & P.Henry : "Towards the prediction of cavitation erosion: IMHEF research programm", EPRI pumps symposium, New Orleans, (1987)
- [36] B. S. Stratford: "An experimental flow with zero skin friction troughout its region of pressure rise" JFM 5 17 (1959)
- [37] J.-N. Favre & W. Walther : " Analyse et amélioration du comportement cavitant d'une turbine Kaplan par l'utilisation d'une méthode inverse d'écoulement potentiel 2D", Symposium de l'AIRH (Montreal, 1986)
- [38] J.-N. Favre, F. Avellan & I. L. Ryhming : " Cavitation performance improvement by using a 2-D inverse method of hydraulic runner design", Proc. of Int. Conf on Inverse Design concept in Eng. Sciences. II, (Penn State University ,1987)
- [39] F. Avellan, P. Henry & I. L. Ryhming : "A new high speed cavitation tunnel for cavitation studies in hydraulic machinery" ASME Winter Annual Meeting; (Boston 1987)
- [40] F. Avellan, A Karimi : "Dynamics of vortex cavitation involved in the erosion of hydraulic machines" ELSI VII (Cambridge UK, 1987)

- [41] A. Karimi , F. Avellan : " Comparison of erosion mechanisms in different types of cavitation " WEAR, 113 (1986)
- [42] R. Michel : "Etude de la transition sur les profils d'aile, établissement d'un critère de détermination du point de transition et calcul de traînée de profil en incompressible" ONERA 1/1578 A (1951)
- [43] M. R. Head : " Entrainment in the turbulent boundary layer", ARC R & M 3152 (1958)
- [44] V. Moreau : " Calcul de la couche limite sur un profil de type oignon" travail de diplôme , EPFLausanne (1982)
- [45] P. Rebuffet : "Aérodynamique expérimentale" tome I, Dunod (1969)
- [46] Gradshtyn & Ryzhik : "Tables of integrals, series & products" Academic press (1980)
- [47] O. D. Kellog : "Foundations of potential theory" Dover (1954)

Annexe A

1.Expression de la vitesse au moyen de distribution de singularités

En appliquant la relation de Green dans un plan xy, on obtient un potentiel $\Phi(X)$ au point $X(x,y,z)$, situé dans un domaine D extérieur ou intérieur à une surface S, Z étant sur S, \mathbf{n} normal à S en Z, $\mathbf{r} = \mathbf{X} - \mathbf{z}$ [47]

$$\Phi(X) = \frac{1}{2\pi} \left[\iint \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi(Z) \frac{1}{r} dS - \iint \Phi(Z) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dS \right]$$

$\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi(z) = \frac{d\Phi}{dn}$ s'apparente à une distribution de sources sur S : $\sigma(Z)$

$\Phi(Z)$ s'apparente à une distribution de dipôles sur S : $\mu(Z)$

La vitesse issue de ce potentiel $\Phi(X)$ est

$$\mathbf{W}(X) = \nabla \Phi(X) = \frac{1}{4\pi} \left[\iint \sigma(Z) \frac{\mathbf{r}}{r^3} dL - \iint \mu(Z) \frac{\mathbf{r}}{r^4} dL \right]$$

Considérons le terme issu du dipôle qu'on peut écrire aussi

$$\iint \mu(Z) \nabla \times \left(\nabla \cdot \left(\mathbf{n} \frac{1}{r} \right) \right) dL$$

comme $\nabla \times (\nabla \times \left(\frac{1}{r} \mathbf{n} \right)) = \nabla (\nabla \cdot \left(\frac{1}{r} \mathbf{n} \right)) + \Delta \left(\frac{1}{r} \mathbf{n} \right)$ et que ce dernier terme est nul, on peut écrire:

$$\begin{aligned} & \nabla \times \left(\iint \mathbf{n} \times \mu(Z) \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dS \right) = \\ & = \nabla \times \left(\iint \mathbf{n} \times \nabla \left(\mu(Z) \frac{1}{r} \right) dS \right) - \iint \mathbf{n} \times \nabla (\mu(Z)) \frac{1}{r} dS \end{aligned}$$

le premier terme correspond à un filament tourbillonnaire $\mu(Z)$ sur la courbe fermée C , après application de la formule de Stokes:

$$\nabla \times \int_C \mu(Z) \frac{1}{r} dL$$

Quant au deuxième terme, il peut être considéré comme issu d'un champ de vecteur distribué sur S : $\gamma(Z) = n(Z) \times \nabla \mu(Z)$ dont la contribution sur la vitesse est équivalente à celle d'une distribution de dipôle $\mu(Z)$, de telle sorte que:

$$W(X) = \frac{1}{4\pi} \left[\iint \sigma(Z) \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS - \iint \gamma(Z) \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS \right]$$

On peut restreindre cette expression à deux dimensions dans le plan xy par exemple:

$$W(X) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_C \sigma(Z) \frac{\mathbf{r}}{r^2} dL - \int_C \gamma(Z) \times \frac{\mathbf{r}}{r^2} dL \right]$$

cette expression transposée dans le plan complexe ($z=x+iy$) s'écrit:

$$W(X) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{[\sigma(z) + i\gamma(z)] dz}{r}$$

qui est équivalent à :

$$W(X) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\sigma(z) dz}{r}$$

avec $dz = dx + i dy$

2. Rappel sur les fonctions complexes

a) Soit $F(X)$ un potentiel complexe $F(X)=\Phi+i\Psi$, X appartenant au domaine D simplement connexe, Φ et Ψ sont partout différentiables en x et y , alors :

(i) Φ est différentiable en X

(ii) Φ et Ψ sont solutions des équations différentielles de Cauchy-Riemann :

$$\Phi_x = \Psi_y = V_x$$

$$\Phi_y = -\Psi_x = V_y$$

et de chacune de ces deux propriétés peut découler l'autre.

Une fonction F est dite alors analytique dans D si pour tout point X de D elle satisfait les conditions (i) et (ii) ; pour analytique on peut aussi dire régulière ou holomorphe.

b) Si un potentiel complexe F est analytique, alors Φ et Ψ sont des fonctions harmoniques et leur laplacien est nul, F est donc un potentiel remplissant les conditions (1) et (2) du chapitre 1.2. et peut être développé suivant une somme de fonctions harmoniques f_i .

D'autre part $\Delta\Phi = \nabla \cdot (\nabla\Phi) = 0$ et $\nabla_x(\nabla\Phi) = 0$

c) Soit la vitesse complexe $\overline{W}(X) = V_x + iV_y$

alors $dF(X)/dX = W(X) = V_x - iV_y$ en vertu des relations de Cauchy- Riemann.

Annexe B**1. Intégration analytique des coefficients d'influence**

On prend un élément de la vitesse complexe, générée par le segment z_j, z_{j+1} :

$$\Delta W_j(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{\sigma(z) dz}{(X-z)}$$

avec $X=T+iY$, $z=x+iy$, $(\frac{dy}{dx})$ étant constant sur le segment z_j, z_{j+1} , on trouve les composantes de la vitesse $\Delta V_x, \Delta V_y$:

$$\Delta V_{xj} = \frac{1}{2\pi} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\sigma(x) (T-x + (Y-y) \frac{dy}{dx}) dx}{(T-x)^2 + (Y-y)^2}$$

$$\Delta V_{yj} = \frac{1}{2\pi} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\sigma(x) (Y-y - (T-x) \frac{dy}{dx}) dx}{(T-x)^2 + (Y-y)^2}$$

la distribution linéaire $\sigma(x)$ s'écrit :

$$\sigma(x) = \sigma_j + (\sigma_{j+1} - \sigma_j) \frac{(x-x_j)}{(x_{j+1}-x_j)} = g + h_1 x$$

et on généralise les deux expressions (a) $Y-y$ et (b) $T-x$ par $a_1' + b_1'x$

de telle sorte que l'intégrale se résolve en additionnant (une fois avec et une fois sans multiplier par le facteur $\frac{dy}{dx}$ l'intégrale :

$$ax, ay, bx \text{ ou } by = \int \frac{(g + h_1 x)(a_1' + b_1' x) dx}{(a_2 x^2 + b_2 x + c_2)}$$

dans le cas (a) $b_1' = b_1 = \frac{(y_{j+1} - y_j)}{(x_{j+1} - x_j)}$ et $a_1' = Y + x_j b_1 - y_j = a_1$

et le cas (b) $b_1' = -1$ et $a_1' = T$

d'autre part, on introduit les coefficients suivants :

$$\begin{aligned} a_2 &= b_1 + 1 & b_2 &= 2(-a_1 b_1 - T) \\ c_2 &= a_1^2 + T^2 & \Delta &= 4(T b_1 - a_1)^2 \\ h &= \frac{1}{x_{j+1} - x_j} & g_1 &= -h x_j, \quad g_2 = -g_1 + 1 \\ g &= g_1 \sigma_{j+1} + g_2 \sigma_j & h_1 &= h(\sigma_{j+1} - \sigma_j) \end{aligned}$$

on obtient les coefficients de σ_j : bx_j (cas b) ou by_j (cas a) et de σ_{j+1} : ax_j (cas b) ou ay_j (cas a) :

$$\begin{aligned} bx_j \text{ ou } by_j &= -hb_1' a_3 + (g_2 b_1' - ha_1') b_3 + g_2 a_1' c_3 \\ ax_j \text{ ou } ay_j &= hb_1' a_3 + (g_1 b_1' - ha_1') b_3 + g_1 a_1' c_3 \\ \text{avec } a_3 &= \frac{x_{j+1} - x_j}{a_2} - \frac{b_2 d_1}{2a_2^2} + \frac{(b_2^2 - 2a_2 c_2) c_3}{2a_2^2} \\ b_3 &= (d_1 - b_2 c_3) / (2a_2) \\ c_3 &= 2 \frac{\arctan \frac{2a_2 x_{j+1} + b_2}{\sqrt{\Delta}} - \arctan \frac{2a_2 x_j + b_2}{\sqrt{\Delta}}}{\sqrt{\Delta}} \\ d_1 &= \ln \frac{a_2 x_{j+1}^2 + b_2 x_{j+1} + c_2}{a_2 x_j^2 + b_2 x_j + c_2} \end{aligned}$$

pour connaître les coefficients totaux BV_x ou BV_y de σ_j , il faut ajouter les termes calculés dans le segment précédent ($j-1$):

$$BVx_j = by_j \left(\frac{dy}{dx}\right)_j + ay_{j-1} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{j-1} + ax_{j-1} + bx_j$$

$$BVy_j = ay_{j-1} + by_j - ax_{j-1} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{j-1} - bx_j \left(\frac{dy}{dx}\right)_j$$

Si $x_j = x_{j+1}$: on échange alors T et Y, x_j et y_j , x_{j+1} et y_{j+1} , de telle sorte que $bx_j \left(\frac{dy}{dx}\right)_j = by_j$ et $by_j \left(\frac{dy}{dx}\right)_j = bx_j$. Finalement, on obtient pour $\left(\frac{dx}{dy}\right)_j = 0$:

$$BVx_j = bx_j + ay_{j-1} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{j-1} + ax_{j-1}$$

$$BVy_j = ay_{j-1} - ax_{j-1} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{j-1} - by_j$$

et sur le segment suivant $ay_j \left(\frac{dy}{dx}\right)_j = ax_j$ et $ax_j \left(\frac{dy}{dx}\right)_j = ay_j$

$$BVx_{j+1} = ax_j + by_{j+1} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{j+1} + bx_{j+1}$$

$$BVy_{j+1} = by_{j+1} - bx_{j+1} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{j+1} - ay_j$$

Remarque : le terme $\frac{1}{2\pi}$ apparaissant dans tous les coefficients et par conséquent dans chaque élément de la matrice, on le supprime pour alléger le calcul. Ainsi les Bvx et BVy sont 2π trop grands et les σ_j : 2π trop petits, ce qui ne change rien à la valeur des vitesses.

Annexe C

Sommation de l'influence de toutes les aubes de la grille sur le point X

Le terme à ajouter à l'auto-influence de l'aube de contrôle (profil isolé) est le suivant

(pour un élément $z_j - z_{j+1}$) :

$$\begin{aligned} \Delta W_{\text{grille}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \sigma(z) \sum_{N=-\infty (N \neq 0)}^{N=\infty} \frac{1}{(X - (z + N z_{\text{inter}}))} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \sigma(z) \frac{dz}{z_{\text{inter}}} \sum_{N=1}^{N=\infty} \frac{X - \frac{z}{z_{\text{inter}}}}{(X - \frac{z}{z_{\text{inter}}})^2 - N^2} \end{aligned}$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{(x^2 - k^2)} = \frac{1}{2} (\cotg(\pi x) - \frac{1}{\pi x}) \frac{\pi}{x} \text{ (voir table [46] 1.421 3)}$$

$$\Delta w = \frac{1}{2} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \sigma(z) \left(\cotg\left(\frac{\pi(X-z)}{z_{\text{inter}}}\right) - \frac{z_{\text{inter}}}{\pi(X-z)} \right) \frac{dz}{z_{\text{inter}}}$$

finally, le terme en gras et le terme dû à l'influence de l'aube de contrôle s'annulent, de ce fait la vitesse dans une grille au point (X) s'écrit:

$$W(X) = W_{\infty} e^{-i\beta_{\infty}} + \frac{1}{2z_{\text{inter}}} \sum_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} \sigma(z) \cotg\left(\frac{\pi(X-z)}{z_{\text{inter}}}\right) dz$$

Annexe D

Intégration numérique des coefficients BVx et BVy dans le cas grille

La contribution de l'élément j à la vitesse dans la grille s'écrit :

$$\Delta W_j(X) = \frac{1}{2z_{\text{inter}}} \int_{z_j}^{z_{j+1}} (\sigma_j + (\sigma_{j+1} - \sigma_j) \frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}) \cotg \frac{\pi(X-z)}{z_{\text{inter}}} (dx+idy)$$

le coefficient complexe de σ_j est :

$$\frac{1}{2z_{\text{inter}}} \int_{z_j}^{z_{j+1}} (1 + \frac{x_j-x}{x_{j+1}-x_j}) \cotg \frac{\pi(X-z)}{z_{\text{inter}}} (dx+idy)$$

et celui de σ_{j+1} :

$$\frac{1}{2z_{\text{inter}}} \int_{z_j}^{z_{j+1}} (\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}) \cotg \frac{\pi(X-z)}{z_{\text{inter}}} (dx+idy)$$

en posant :

$$Ax_j = \frac{1}{2z_{\text{inter}}} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j} \text{Re}(\cotg \frac{\pi(X-z)}{z_{\text{inter}}}) dx$$

$$Ay_j = \frac{1}{2z_{\text{inter}}} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j} \text{Im}(\cotg \frac{\pi(X-z)}{z_{\text{inter}}}) dx$$

si bien que le coefficient complexe de σ_{j+1} devient :

$$(Ax_j + iAy_j) (1 + i (\frac{dy}{dx})_j)$$

et on pose pour les coefficients de σ_j :

$$Bx_j = -Ax_j + \frac{1}{2z_{inter}} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \operatorname{Re}(\cotg \frac{\pi(X-z)}{z_{inter}}) dx$$

$$By_j = -Ay_j + \frac{1}{2z_{inter}} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \operatorname{Im}(\cotg \frac{\pi(X-z)}{z_{inter}}) dx$$

de telle sorte que le coefficient complexe de σ_j : devient :

$$(Bx_j + iBy_j) (1. + i (\frac{dy}{dx})_j)$$

Pour connaître le coefficient total de σ_j , il faut ajouter au coefficient de σ_j , que l'on vient de calculer, les termes calculés sur le segment $z_{j-1} z_j$

$$Ax_{j-1} - (\frac{dy}{dx})_{j-1} Ay_{j-1} + i(\frac{dy}{dx})_{j-1} Ax_{j-1} + Ay_{j-1})$$

et finalement, le coefficient complexe total de σ_j est :

$$BVx_j + iBVy_j = Bx_j + Ax_{j-1} - ((\frac{dy}{dx})_{j-1} Ax_{j-1} + (\frac{dy}{dx})_j By_j) + i(By_j + Ay_{j-1} + (\frac{dy}{dx})_{j-1} Ax_{j-1} + (\frac{dy}{dx})_j Bx_j)$$

Pour le cas où $dx=0$, on intègre Ax, Ay, Bx et By le long de y , en multipliant les coefficients $Ax + iAy$ ou $Bx + iBy$ par i au lieu de $1+i(\frac{dy}{dx})$.

Calcul des Ax_j, Ay_j, Bx_j et By_j

En appliquant la règle d'intégration de Simpson, on calcule les grandeurs Ax_j et Bx_j , avec $\Delta x = (x_{j+1} - x_j) / (2ns)$, ns est le nombre de doubles intervalles ($k=1, 2ns+1$)

$$x_k = x_j + (k-1)\Delta x, \quad y_k = y_j + (x_k - x_j)(y_{j+1} - y_j) / (x_{j+1} - x_j), \quad z_k = x_k + iy_k$$

$$k=1 : z_1 = z_j = x_j + iy_j, \quad k=2ns+1 : z_{2ns+1} = z_{j+1} = x_{j+1} + iy_{j+1}$$

$$Bx_j + Ax_j = .5 \frac{\Delta x}{3} \left(\operatorname{Re} \left[\frac{\cotg \frac{\pi(X-z_1)}{z_{int}}}{z_{int}} \right] + 4 \operatorname{Re} \left[\frac{\cotg \frac{\pi(X-z_2)}{z_{int}}}{z_{int}} \right] + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\cotg \frac{\pi(X-z_3)}{z_{int}}}{z_{int}} \right] + 4 \dots \right)$$

$$.....+ 4 \operatorname{Re}\left[\frac{\cotg \frac{\pi(X-z_{2ns})}{z_{int}}}{z_{int}}\right] + \operatorname{Re}\left[\frac{\cotg \frac{\pi(X-z_{j+1})}{z_{int}}}{z_{int}}\right])$$

$$Ax_j = .5 \frac{\Delta x}{3} \left(4 \frac{x_2-x_j}{x_{j+1}-x_j} \operatorname{Re}\left[\frac{\cotg \frac{\pi(X-z_2)}{z_{int}}}{z_{int}}\right] + 2 \frac{x_3-x_j}{x_{j+1}-x_j} \operatorname{Re}\left[\frac{\cotg \frac{\pi(X-z_3)}{z_{int}}}{z_{int}}\right] + 4..... \right.$$

$$\left.+ 4 \frac{x_{2ns}-x_j}{x_{j+1}-x_j} \operatorname{Re}\left[\frac{\cotg \frac{\pi(X-z_{2ns})}{z_{int}}}{z_{int}}\right] + \operatorname{Re}\left[\frac{\cotg \frac{\pi(X-z_{j+1})}{z_{int}}}{z_{int}}\right]) \right.$$

idem pour Ay_j et By_j avec $\operatorname{Im}[\cotg..]$ au lieu de $\operatorname{Re}[\cotg..]$

avec trois points d'appuis les relations se simplifient :

avec $z_{jj+1} = .5 (z_j + z_{j+1})$

$$Bx_j + Ax_j = \frac{(x_{j+1}-x_j)}{12} \left(\operatorname{Re}\left[\frac{\cotg \frac{\pi(X-z_j)}{z_{int}}}{z_{int}}\right] + 4 \operatorname{Re}\left[\frac{\cotg \frac{\pi(X-z_{jj+1})}{z_{int}}}{z_{int}}\right] + \operatorname{Re}\left[\frac{\cotg \frac{\pi(X-z_{j+1})}{z_{int}}}{z_{int}}\right] \right)$$

$$Ax_j = \frac{(x_{j+1}-x_j)}{12} \left(2 \operatorname{Re}\left[\frac{\cotg \frac{\pi(X-z_{jj+1})}{z_{int}}}{z_{int}}\right] + \operatorname{Re}\left[\frac{\cotg \frac{\pi(X-z_{j+1})}{z_{int}}}{z_{int}}\right] \right)$$

idem pour Ay_j et By_j avec $\operatorname{Im}[\cotg...]$ au lieu de $\operatorname{Re}[\cotg...]$

Annexe E

Lissage des points du profil

Après avoir obtenu une coupe cylindrique d'un aubage représenté par une suite de points, il faut pouvoir interpoler tout point du profil et calculer avec précision la dérivée première en ces points. Cette dérivée première doit être continue et régulière surtout dans les zones de forte courbure. Il s'avère préférable de lisser l'extrados et l'intrados par deux équations séparées de type :

$$y = a_1 + a_2\sqrt{x} + a_3 x + a_4 x\sqrt{x} + a_5 x^2 + a_6 x^2 \sqrt{x}$$

ou

$$y = a_1 + a_2\sqrt{x} + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4 + a_6 x^5 \text{ (cf NACA)}$$

(pour le profil Naca à 6 coefficients, on ne saute pas le terme en x^1)

Une raccord vers le nez par une méthode du type spline est inadaptée, car il faut calculer la dérivée avec précision, ce qui est d'autant plus ardu avec la proximité de la tangente verticale. On préfère rejoindre l'intrados et l'extrados au bord d'attaque par 2 courbes paramétriques de type :

$$x = b_1 t^2 + a_1 t + x_u \text{ et } y = d_1 t^2 + c_1 t + y_u, \text{ en } t = 0: y' = \frac{c_1}{a_1}, y'' = \frac{2(a_1 d_1 - b_1 c_1)}{a_1^3}$$

ces deux courbes se rejoignent au point de tangente verticale (x_T, y_T) choisi de telle sorte que le rayon de courbure soit identique de part et d'autre.

En ce point de tangente verticale :

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ donc } t = -\frac{a_1}{2b_1}$$

$$\text{le rayon de courbure } R_T = \frac{y'^2}{x''} = \frac{\left(\frac{c_1 - d_1 a_1}{b_1}\right)^2}{2b_1}$$

L'ordre de grandeur de ce rayon de courbure au bord d'attaque est environ 5-10% de l'épaisseur maximale.

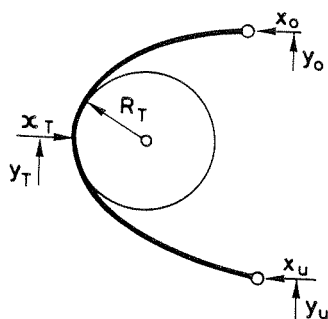


Fig. A.1 Raccord au bord d'attaque des courbes intrados et extrados

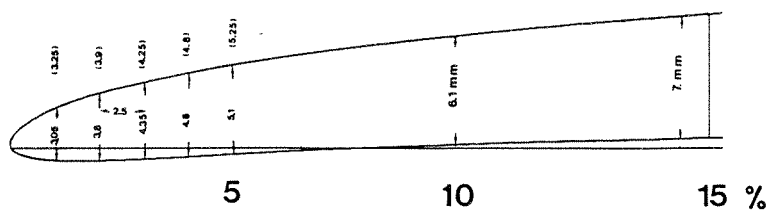


FIG A.2 Contrôle, après lissage, de la modification du profil de la section 4 (chapitre VI.3.1)

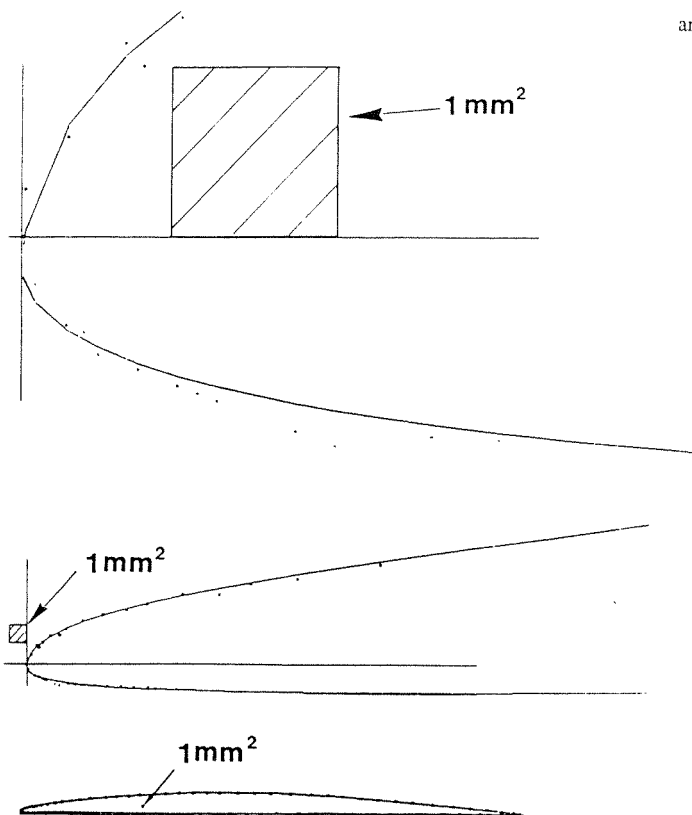


Fig A.3. Lissage du profil de la section 3 (chapitre VI.3.1.)

Raccord entre un spline cubique et la courbe paramétrique du bord d'attaque

On désire, au lieu des courbes à 6 coefficients, déterminer le profil à partir d'un spline cubique, qui est une approximation du profil par des segments de polynômes $P(x^3)$, assurant la continuité des dérivées premières et secondes, aux deux extrémités, la dérivée seconde étant fixée à la valeur nulle (ce qui signifie que la courbe se prolonge par une droite). Dans le cas présent, on connaît la valeur des dérivées première et seconde à une extrémité à partir de la courbe paramétrique du nez. La dérivée seconde calculée peut être introduite dans le second membre du système de résolution des coefficients du spline et l'exigence de continuité de la dérivée première à partir d'une valeur connue demande de raccorder, sur le premier segment

directement accolé au nez, un polynôme $P(x^4)$ avec un coefficient de plus. On aura donc une inconnue supplémentaire à résoudre par rapport au spline classique.

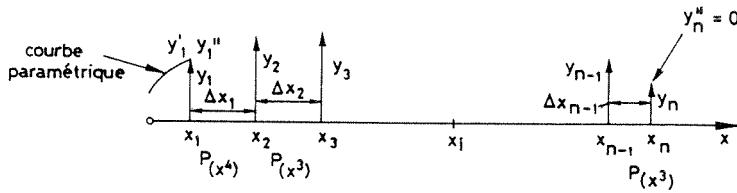


Fig. A.4. Raccord entre un spline cubique et une courbe paramétrique

entre x_1 et x_2 on écrit le polynôme de degré 4, avec $\Delta x_1 = x_2 - x_1$, en x_2 on trouve:

$$y_2 = a_1 + b_1 \Delta x_1 + c_1 \Delta x_1^2 + d_1 \Delta x_1^3 + e_1 \Delta x_1^4$$

$$a_1 = y_1, \quad b_1 = y_1', \quad c_1 = .5y_1'', \quad \text{voir page 15 pour } y' \text{ et } y''$$

$$y_2' = b_1 + 2c_1 \Delta x_1 + 3d_1 \Delta x_1^2 + 4e_1 \Delta x_1^3$$

$$y_2'' = 2c_1 + 6d_1 \Delta x_1 + 12e_1 \Delta x_1^2$$

on exprime les coefficients b_1 et d_1

$$d_1 = \frac{y_2'' - y_1''}{6\Delta x_1} - 2e_1 \Delta x_1$$

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{\Delta x_1} - c_1 \Delta x_1 - d_1 \Delta x_1^2 - e_1 \Delta x_1^3$$

à droite de x_2 , on écrit le polynôme en x^3 :

$$y_3 = y_2 + b_2 \Delta x_2 + c_2 \Delta x_2^2 + d_2 \Delta x_2^3$$

$$c_2 = .5y_2''$$

$$d_2 = \frac{y_3'' - y_2''}{6 \Delta x_2}$$

$$b_2 = \frac{y_3 - y_2}{\Delta x_2} - c_2 \Delta x_2 - d_2 \Delta x_2^2$$

ces relations étant valables pour les b_i , c_i et d_i ($i > 1$). En exigeant la continuité de la dérivée première en x_2 , on introduit e_1 , d_1 , b_1 et c_1 dans $y'(x_2)$ et d_2 , c_2 et b_2 dans $y'(x_2^2)$ pour obtenir:

$$2(\Delta x_1 + \Delta x_2)y_2'' + \Delta x_2 y_3'' - 6\Delta x_1^3 e_1 = 6 \left(\frac{(y_3 - y_2)}{\Delta x_2} - \frac{(y_2 - y_1)}{\Delta x_1} \right) - y_1'' \Delta x_1$$

les termes inconnus sont donc y_2'' , y_3'' et e_1 .

D'autre part, on exige aussi la continuité de y' en x_1 , y_1' étant connu à gauche:

$$y_1' = \frac{y_2 - y_1}{\Delta x_1} - \frac{1}{2} \Delta x_1 y_1'' - (y_2'' - y_1'') \frac{\Delta x_1}{6} + e_1 \Delta x_1^3$$

le système de résolution du spline avec raccord en $P(x^4)$ devient

$$\begin{pmatrix} 6\Delta x_1^3 & \Delta x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 6\Delta x_1^3 & 2(\Delta x_1 + \Delta x_2) & \Delta x_2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \Delta x_2 & 2(\Delta x_2 + \Delta x_3) & \Delta x_3 & \dots \\ 0 & : & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & : & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Delta x_{n-2} & 2(\Delta x_{n-1} + \Delta x_{n-2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ y_2'' \\ y_3'' \\ \vdots \\ y_{n-1}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\left(\frac{y_2 - y_1}{\Delta x_1} - y_1'\right) - 2y_1'' \Delta x_1 \\ 6\left(\frac{y_3 - y_2}{\Delta x_2} - \frac{y_2 - y_1}{\Delta x_1}\right) - y_1'' \Delta x_1 \\ 6\left(\frac{y_4 - y_3}{\Delta x_3} - \frac{y_3 - y_2}{\Delta x_2}\right) \\ \vdots \\ 6\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{\Delta x_{n-2}}\right) \end{pmatrix}$$

$$y_n'' = 0$$

Après résolution des y_i'' et de e_1 , on calcule les coefficients b_i , c_i et d_i selon les relations exprimées plus haut.

Profil NACA testé en veine

L'épaisseur du profil symétrique NACA tronqué, testé dans la veine du tunnel hydrodynamique de l'IMHEF est constituée de la façon suivante:

x_m étant l'abscisse du point d'épaisseur maximale y_{\max}

$$0 \leq x \leq x_m \quad y = a_0 \sqrt{x} + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$x_m \leq x \leq 1. \quad y = d_0 + d_1(1-x) + d_2(1-x)^2 + d_3(1-x)^3$$

$$a_0 = \sqrt{2r} \quad r \text{ est le rayon de courbure au bord d'attaque}$$

on peut choisir le rapport $\frac{r}{y_{\max}}$, mais il faut contrôler que $5.716 \frac{\sqrt{r}}{y_{\max}} < 8$.

d_0 est la demi épaisseur au bord de fuite $d_0 = \frac{y_{\max}}{100}$

d_1 est la pente au bord de fuite $d_1 = y_{\max} (1 + (3.9(x_m - .2))^2)$

les autre constantes sont déterminées par la continuité du deuxième ordre entre les deux courbes au point d'épaisseur maximale.

$$d_3 = 2 \frac{d_0 + \frac{1}{2}(d_1(1-x_m) - y_{\max})}{(1-x_m)^3}$$

$$d_2 = -\frac{1}{2} \frac{d_1}{1-x_m} - 1.5 d_3(1-x_m)$$

$$a_3 = \frac{d_2}{x_m} + \frac{3 d_3(1-x_m)}{x_m} + \frac{y_{\max}}{2x_m^3} - \frac{3}{8} \frac{a_0}{x_m^{2.5}}$$

$$a_2 = d_2 + 3d_3(1-x_m) - 3a_3 x_m + \frac{1}{8} \frac{a_0}{x_m^{1.5}}$$

$$a_1 = -2a_2 x_m - 3a_3 x_m^2 - .5 \frac{a_0}{\sqrt{x_m}}$$

dans ce cas, $x_m = .45$, $y_{\max} = .09$, $r = .0135$

et les constantes prennent les valeurs suivantes:

$$\begin{array}{lll}
 a_0 = .164316767 & a_1 = -.212452312 & a_2 = .25007153 \\
 a_3 = -.2223646 & d_0 = .0009 & d_1 = .17555625 \\
 d_2 = -.20103099 & d_3 = .050223516 &
 \end{array}$$

la dénomination du profil est la suivante

$$\text{NACA} \quad 0 \quad 0 \quad 9-7.38 \quad 45/1.95$$

le profil est ensuite tronqué à 90% , l'épaisseur au culot représente 37 % de l'épaisseur maximale.

Annexe F**Détermination d'une courbe caractéristique (φ, ψ) à partir des résultats du calcul potentiel sur un filet cylindrique de machine axiale (sans pertes)**

Soit une vitesse absolue à l'entrée de l'aubage C_1 de direction β_{C_1} fixe, on cherche pour une vitesse de rotation constante et un calage fixe les valeurs φ et ψ obtenues par la variation de C_1 et par conséquent de l'incidence qui permettront de caractériser l'échange de quantité de mouvement dans le filet. La force résultante sur un profil de largeur dR et de corde L est

$$F = \frac{1}{2} \rho C_z W_\infty^2 L dR$$

où C_z est la portance du profil, l'incidence de W_∞ est α_∞ ($\beta_\infty = \alpha_\infty + \beta_0$). Cette force, projetée sur l'axe de la grille, exerce un couple et, par suite de la rotation, développe un puissance E sur Z aubes du filet :

$$E = \frac{1}{2} Z \rho C_z W_\infty^2 L \sin \beta_\infty U dR$$

En négligeant les pertes, on compare cette puissance à la puissance hydraulique du filet:

$$E = \rho \dot{V} g H = \rho W_\infty \sin \beta_\infty 2\pi g H R dR$$

En égalant ces deux dernières relations et en posant $Zt = 2\pi R$, on trouve :

$$2gH = C_z W_\infty U \left(\frac{L}{t} \right)$$

Les chiffres adimensionnels étant définis comme suit :

$$\psi = \left(\frac{C_z W_\infty}{U} \right) \left(\frac{L}{t} \right)$$

$$\varphi = \left(\frac{W_\infty}{U} \right) \sin \beta_\infty$$

En variant β_∞ pour β_0 , U et β_{c_1} fixes on obtient une courbe $\varphi(\psi)$. Le calcul 2-dim fourni la valeur de C_z pour chaque β_∞ , il faut connaître encore la valeur $\forall f(W_\infty, U) = \forall f(W_\infty, W_1) \frac{W_1}{U}$. Le terme $\frac{W_\infty}{W_1}$ est connu d'après le calcul 2-D et $\frac{W_1}{U}$ est obtenu à partir du théorème du sinus: $\frac{U}{\sin \beta_{cw}} = \frac{W_1}{\sin \beta_{c_1}}$

donc: $\frac{W_1}{U} = \frac{\sin \beta_{c_1}}{\sin \beta_{cw}}$ et, avec $W_\infty = 1$, $L = 1$, $\sin \beta_{cw} = \sin(\beta_{c_1} + \beta_1)$:

$$\psi = \frac{C_z \sin \beta_{c_1}}{W_1 t \sin \beta_{cw}}$$

$$\varphi = \frac{\sin \beta_\infty \sin \beta_{c_1}}{W_1 \sin \beta_{cw}}$$

Pour l'exécution de courbes comparatives pour un même filet en fonction de β_{c_1} ou β_1 , on

peut se contenter de tracer $\psi^* = \frac{C_z}{W_1 t}$ et $\varphi^* = \frac{\sin \beta_\infty}{W_1}$.

Les chiffres ψ et φ définis ici sont normés par la vitesse périphérique locale $U = \omega r$, pour comparer différents filets d'une aube, il faut les rapporter à la vitesse périphérique à la couronne $U_e = \omega R_e$:

$$\psi_e = \psi \left(\frac{r}{R_e}\right)^2 \quad \text{et} \quad \varphi_e = \varphi \left(\frac{r}{R_e}\right)$$

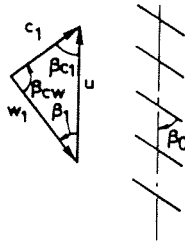


Fig. A.5 Triangle des vitesses à l'entrée

ANNEXE G

Intégration d'une courbe entre 2 pts fixes

Soient 2 points y_{id} et y_{if} fixés, les dérivées y' sur le tronçon délimité par ces 2 points sont données sous forme discrète, on cherche les valeurs y correspondant à ces pentes y'_i .

On peut écrire tout d'abord le développement limité à gauche et à droite de tout point y_i :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{(y'_i + y'_{i+1})(x_{i+1} - x_i)}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i - \frac{(y'_i + y'_{i-1})(x_{i-1} - x_i)}{2}$$

en additionnant ces 2 expressions, on trouve une relation, qu'on écrit pour tous les points x_i ($i=id+1 \dots if-1$), permettant l'édification d'un système linéaire à matrice tridiagonale pour les y_i :

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = \frac{(x_{i+1} - x_i)(y'_{i+1} + y'_i)}{2} + \frac{(x_{i-1} - x_i)(y'_i + y'_{i-1})}{2}$$

Pour les points limites :

$y_{i-1} = y_{id}$ passe dans le second membre

$y_{i+1} = y_{if}$ passe dans le second membre

Si maintenant le point y_{if} n'est pas connu et qu'on doit le raccorder au point situé à la limite aval du sillage (x_{ils}, y_{ils}) par une cubique $P(x^3)$ du style: $y = y_{if} + y'_{if}(x - x_{ils}) + a_2(x - x_{ils})^2 + a_3(x - x_{ils})^3$, on écrit les trois conditions pour les inconnues supplémentaires y_{if} , a_2 et a_3 en imposant la pente y'_{if} et les ordonnées y_{if} et y_{ils} aux derniers points du plateau des pressions, ainsi que la pente y'_{ils} et l'ordonnée y_{ils} sur le profil. Les termes du second membre sont soulignés.

$$\underline{y_{ils}} = y_{if} + \underline{y'_{if}(x_{ils} - x_{if})} + a_2(x_{ils} - x_{if})^2 + a_3(x_{ils} - x_{if})^3$$

$$\underline{y'_{ils}} = \underline{y'_{if}} + 2a_2(x_{ils} - x_{if}) + 3a_3(x_{ils} - x_{if})^2$$

$$y_{if-1} = y_{if} + \underline{y'_{if}(x_{if-1} - x_{if})} + a_2(x_{if-1} - x_{if})^2 + a_3(x_{if-1} - x_{if})^3$$

ce qui complète le système linéaire de 3 lignes et 3 colonnes.

ANNEXE H**Disposition des panneaux dans le profil**

Un profil $y(x)$ étant au moyen d'un squelette $y_s(x_s)$ et d'une épaisseur $y_{ep}(x_s)$ selon les relations suivantes:

$$\begin{array}{llll} \text{extrados:} & x = x_s - y_{ep} \sin(\alpha_s) & \text{et} & y = y_s + y_{ep} \cos(\alpha_s) \\ \text{intrados:} & x = x_s + y_{ep} \sin(\alpha_s) & \text{et} & y = y_s - y_{ep} \cos(\alpha_s) \end{array}$$

avec $\text{tg}(\alpha_s) = y_s'$

les sommets des panneaux z sont déplacée à l'intérieur du profil de la manière suivante:

$$x_z = x_s + h y_{ep} \sin(\alpha_s) \quad \text{et} \quad y_z = y_s - h y_{ep} \cos(\alpha_s)$$

Si le profil ne présente aucune concavité, alors $h = 1$ et les points de contrôle sont situés automatiquement hors du polygone délimité par les panneaux. En cas de concavité, $.95 < h < 1$, et les sommets des panneaux se trouvent déplacés à l'intérieur du profil pour que tous les points de contrôle soient situés à l'extérieur du polygone. On prend la même valeur de h sur tout le profil pour éviter des discontinuités.

Après chaque pas de calcul inverse, les panneaux sont évidemment déplacés en fonction de la modification du profil.

SYMBOLES ET DÉFINITIONS

Les symboles suivis de la caractéristique \Re ou \mathbb{C} ne sont utilisés que pour le calcul dans le plan complexe, où d'autres grandeurs physiques peuvent être utilisées, mais sous forme adimensionnelle.

b	[m]	largeur du filet fluide
BV_{xij}, BV_{yij}	\Re	coefficients d'influence de l'élément j en i
C_p	[-]	coefficient de pression $(1 - (\frac{W}{W_\infty})^2)$
$C_u (W_u)$	$[ms^{-1}]$	composante tangentielle de la vitesse absolue (relative)
$C_z (W_z)$	$[ms^{-1}]$	composante axiale de la vitesse absolue (relative)
$C_1 (W_1)$	$[ms^{-1}]$	vitesse absolue (relative) infini amont
$C_1 (W_1 \text{ ou } W_2)$	$[ms^{-1}]$	vitesse absolue (relative) infini aval
C_x	[-]	coefficient de traînée
C_z	[-]	coefficient de portance
$F(X)$	\mathbb{C}	potentiel complexe
F_N	\Re	force normale au profil
F_T	\Re	force tangente au profil
F_x	\Re	force de traînée
F_z	\Re	force de portance
H	[m]	chute
L	[m]	corde du profil

\mathbf{n}	$[-]$	vecteur normal à un élément de surface ds
r	$[m]$	rayon du filet fluide
R_e	$[m]$	rayon extérieur de l'aube
Re	$[-]$	nombre de Reynolds $\frac{W_\infty L}{\nu}$
t	$[m]$	pas de la grille
U	$[ms^{-1}]$	vitesse périphérique
\dot{V}	$[m^3s^{-1}]$	débit volumique
V_x	\Re	comp. de la vitesse selon x
V_y	\Re	comp. de la vitesse selon y
W_∞	$[ms^{-1}]$	vitesse de l'écoulement parallèle extérieur
$W(X)$	$[ms^{-1}]$	vitesse en $X(x,y,z)$
$W(X)$	\mathbb{C}	vitesse en X
X	\mathbb{C}	point de contrôle
z	\mathbb{C}	point courant sur le panneau de singularités
z_{inter}	\mathbb{C}	pas de la grille
$\alpha_i (\beta_i)$	$[^\circ]$	incidence à l'entrée de l'aubage turbine ou sortie pompe par rapport à la corde (ou à l'axe de la grille)
$\alpha_i(\beta_i)$	$[^\circ]$	incidence à la sortie de l'aubage turbine ou entrée pompe par rapport à la corde (ou à l'axe de la grille)
α_i	$[^\circ]$	angle du profil avec la corde au point i
α_∞	$[^\circ]$	incidence par rapport à la corde

β_0	[°]	calage de la grille
β_∞	[°]	incidence par rapport à l'axe de la grille
γ	[Nm ⁻¹]	tension superficielle
ΔA_i	[-]	contribution de l'élément i à A ou variation de A en i
Γ	\Re	circulation
μ	\Re	distribution de doublet ou dipôle
ρ	[kgm ⁻³]	masse spécifique
σ_j	\Re	valeur de la distribution de singularité en z_j
σ	[-]	chiffre de cavitation
φ	[-]	chiffre de débit
ψ	[-]	chiffre d'énergie
Φ	\Re	potentiel
Φ_F	\Re	débit de la vitesse
Ψ	\Re	fonction de courant
ω	[s ⁻¹]	vitesse angulaire
\wedge		relatif au point de rendement maximal

MOYENS D'ESSAI A L'IMHEF

1. Le tunnel de cavitation

1.1. Présentation générale

L'Institut de Machines hydrauliques et de Mécanique des fluides possède un tunnel hydrodynamique à haute vitesse de plus de 110 m³, permettant d'effectuer des mesures en cavitation en circuit fermé, ce qui exige un contrôle et une élimination continus des germes de cavitation en cas d'injection de ces germes avant la veine d'essai..

L'écoulement dans la veine d'essai est bi-dimensionnel sur 90% de la largeur, ce qui permet d'étudier les caractéristiques fondamentales des structures cavitantes, tout en étant gêné le moins possible par d'éventuels effets tridimensionnels, courants dans les machines hydrauliques.

Les caractéristiques principales sont les suivantes:

- vitesse maximale dans la veine d'essai	50 m/s
- débit maximal	1,125 m ³ /s
- pression maximale	16 bars
- section de la veine	150 x 150 mm
- puissance de la pompe	500 kW

Aucune spécification concernant la température n'a été faite. La gamme de variation est de 10°C à 60°C. La température standard lors de l'utilisation du tunnel est de 16.5°C.

Les conditions d'écoulement telles que: le chiffre de cavitation σ , la vitesse, etc.doivent être mesurées et rester constantes. L'acquisition de toutes ces valeurs se fait donc en temps réel.

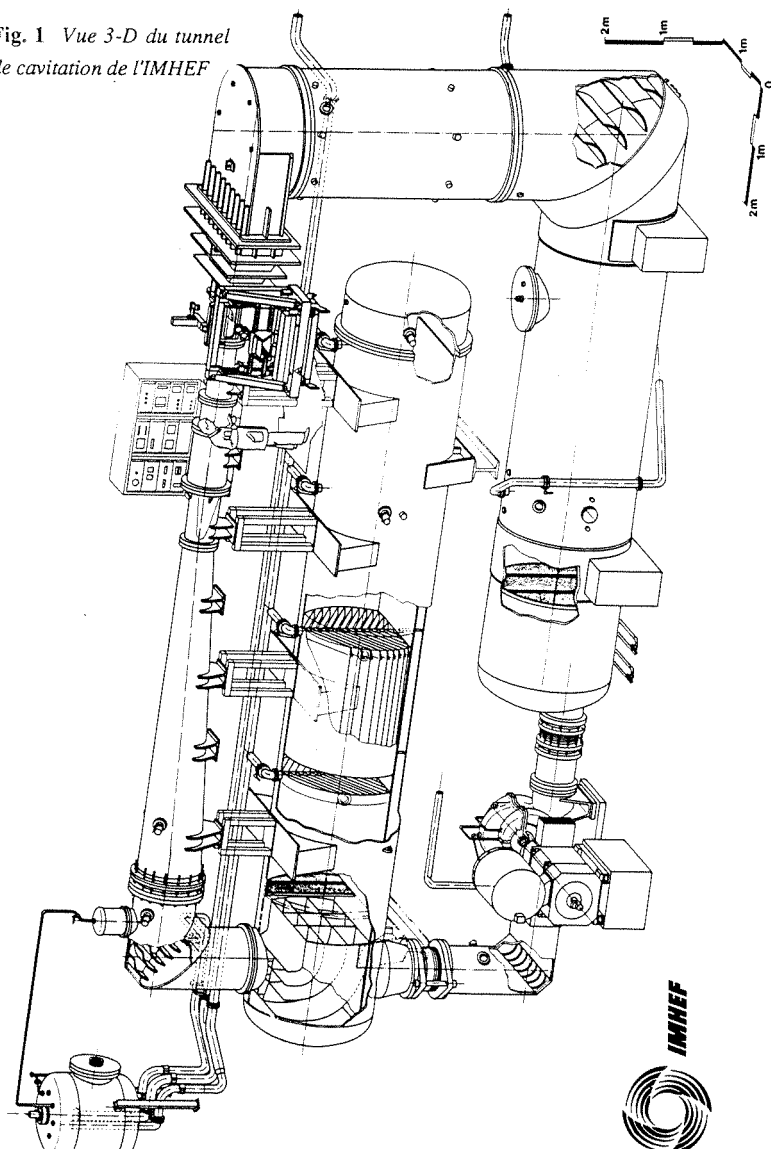
Voici un tableau rassemblant les principales spécifications du tunnel.

But	Spécifications hydrodynamiques
Bon accès et bonnes visualisations	une section test avec des côtés constitués de plaques planes - photographie stéréoscopique
Vitesse	50 m/s au maximum
Conditions d'écoulement	<ul style="list-style-type: none">- 100 s de temps de transit minimum- un piège à bulles pour capter les bulles dont le diamètre est supérieur à 100 μm
Contrôle des conditions d'écoulement macroscopiques	<p>mesures en temps réel de:</p> <ul style="list-style-type: none">- nombre de cavitation dans la section- vitesse dans la veine d'essai- teneur en gaz dissous- teneur en germes de cavitation
Pénétration dans le champ d'écoulement cavitant	<p>mesures des valeurs instantanées:</p> <ul style="list-style-type: none">- les 2 composantes de la vitesse- la puissance acoustique

1.2. Conception du tunnel de cavitation

La disposition originale de l'installation sur trois étages a permis une utilisation optimale du volume à disposition. Tout le circuit est autoporteur; il n'a aucune liaison avec le plancher qui supporte l'appareillage de mesure. On évite ainsi que les vibrations violentes produites par la cavitation ne se transmettent aux instruments de mesure.

Fig. 1 Vue 3-D du tunnel de cavitation de l'IMHEF



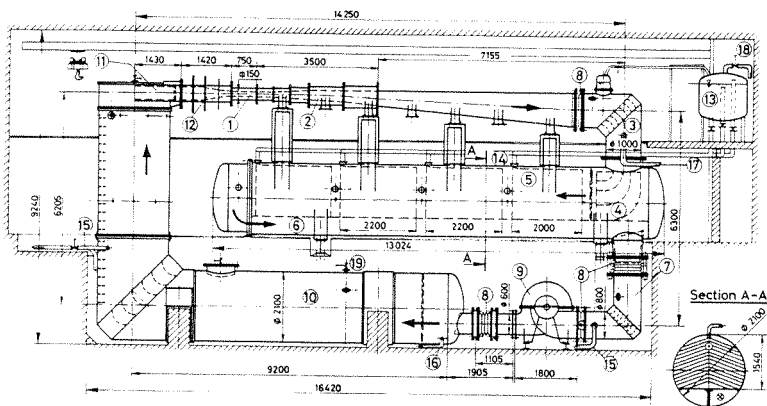


Fig. 2 *Vue latérale du tunnel hydrodynamique de cavitation de l'IMHEF*

1- veine d'essai, 2-diffuseur, 3-coude à ailettes, 4-défecteur, 5-piège à bulles, 6-retour sous la plaque de séparation, 7- ailettes, 8-compensateurs, 9-pompe de circulation, 10-résorbeur, 11-plaques verticales de séparation, 12-contraction, 13-chambre de pressurisation, 14-tuyau de collecte des bulles, 15-tuyau du système de refroidissement, 16-évacuation, 17-vidange, 18-contrôle de pression d'air, 19-vanne de sécurité de haute pression

La veine d'essai (fig. 2, chiffre 1) est parallélépipède rectangle de 150 mm x 150 mm x 750 mm. Elle se compose d'une structure résistante (aluminium bronze) supportant des fenêtres en plexiglas de haute qualité sur lesquelles on a fixé des plaques de verre traité (float), de manière à permettre la mesure de vitesse par laser. La pression dans la veine d'essai est au maximum de 6 bar.

Un des côtés de la veine sert de support au profil; les trois autres sont en plexiglas.

La veine est prolongée par un long diffuseur (fig. 2, chiffre2) dont l'enveloppe extérieure est constituée de plusieurs tronçons cylindriques. Le profil hydraulique à l'intérieur a été obtenu par un moulage en résine epoxyde qui assure une excellente précision et un très bon état de surface. L'intérêt de ce diffuseur est de retrouver presque toute la pression dynamique en sortant de la section test. Il réduit la vitesse dans la veine d'essai de 2.9%.

Ensuite sur 2,5 mètres la section transversale augmente graduellement et symétriquement, variant de 0,15 m x 0,15 m à 0,3 m x 0,3 m.

Puis la paroi supérieure du diffuseur est maintenue horizontale, tandis que la section transversale varie asymétriquement jusqu'à ce qu'elle atteigne la section circulaire.

L'eau descend ensuite et passe dans un coude à ailettes (fig. 2. chiffre 4) de telle sorte que la vitesse soit encore réduite avant le piège à bulles. Ce coude est formé de 2 plaques verticales et de 4 plaques incurvées.

L'eau pénètre ensuite dans le débulleur (fig. 2. chiffre 5) qui est un cylindre de 2,1 m de diamètre et de 14 m de longueur.

A l'intérieur, un système de plaques parallèles permet de capter les bulles d'un diamètre supérieur à 0,125 mm à 20m/s dans la veine (0.15 mm à 30 m/s, 0.2 à 50 m/s)

La figure 3 illustre ce dispositif en montrant le système de captation des bulles par des plaques horizontales et une conduite verticale.

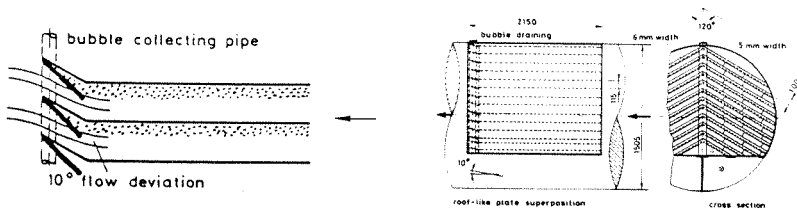


Fig 3. Plaques de captation

L'eau revient ensuite en arrière par la base du débulleur (fig. 2. chiffre 6) pour pénétrer dans la pompe (fig. 2. chiffre 9). Celle-ci est du type semi-axial à double ouïe. Son point de fonctionnement optimum est de 1,3 m³/s pour une pression de 20 m à une vitesse de rotation maximale de 700 π /min.

La pompe est entraînée par un moteur à courant continu alimenté par un système de redresseur à thyristors qui permet de faire varier la vitesse entre 50 et 700 π /min.

Le circuit se poursuit par un résorbeur (fig. 2. chiffre 10) dont la fonction est de dissoudre les petites bulles, d'un diamètre inférieur à 0,1 mm et de les faire disparaître. Cet élément se présente sous forme d'une conduite avec un coude aileté d'un diamètre de 2,1 m et d'une longueur totale de 16 m. La faible vitesse donne le temps nécessaire aux microbulles pour se dissoudre.

Un coude (fig. 2. chiffre 11), suivi d'un convergent (fig. 2. chiffre 12) amène l'eau dans la veine d'essai. Ce convergent très prononcé (rapport de section de 46) permet d'avoir un écoulement excellent dans la veine.

Le système de contrôle de la pression (fig. 2. chiffre 13).

La pression est contrôlée en conservant la pression de l'air constante au-dessus de la surface libre dans le vase. Il est nécessaire d'introduire un volume compressible afin de compenser l'expansion de volume lors des opérations effectuées à haute pression.

Une instrumentation de mesure très performante complète l'installation. L'élément principal est constitué d'un anémomètre Laser-Doppler à deux composantes qui permet de mesurer la vitesse en un point quelconque de l'écoulement sans que l'écoulement ne soit perturbé.

On dispose également d'une chaîne de mesure de pression automatique: un commutateur de pression électromécanique "Scanivalve" a été interfacé sur le microordinateur. L'électronique développée permet de commuter jusqu'à 240 prises de pressions. Cette chaîne de commutation reliée à un capteur de pression Digiquartz de chez "Paroscientific" permet de relever de manière automatique le champ de pression sur un profil.

Le tunnel est également équipé par:

- un hydrophone acoustique
- une balance hydrodynamique à 3 composantes
- un système de visualisation de la cavitation dans la section test (avec des flashes dont la durée de l'éclair peut descendre jusqu'aux alentours de 2 μ s).

1.3 Mesure de la vitesse et du chiffre de cavitation

Ces mesures se font par les mesures des pressions statiques à l'amont et à l'aval du convergent (P1 et P2) et par une mesure de la température dans la section test (avec le thermomètre Telna). Les capteurs de pression digiquartz sont reliés à un calculateur de pression Paroscientific.

2. Le capteur de pression DIGIQUARTZ

2.1. Présentation générale

Le capteur de pression absolue DIGIQUARTZ utilise un barreau en cristal de quartz encasté à ses extrémités (fig. 4) comme élément sensible.

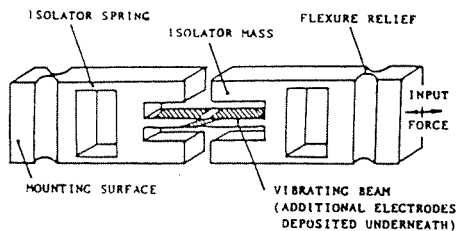


Fig. 4 capteur de pression absolue

Le cristal de quartz a été choisi pour ses propriétés piézoélectriques, ses caractéristiques stables en fréquence, ainsi que pour sa faible sensibilité aux effets thermiques.

Un système d'isolation (Resonata) du barreau de quartz a été mis en place de manière à l'isoler de toutes les forces extérieures excepté celle due à la pression appliquée à l'entrée du capteur.

La pression appliquée à l'entrée du capteur produit une force de compression sur le barreau de quartz par l'intermédiaire d'un soufflet flexible et d'un bras monté sur pivot (fig. 5).

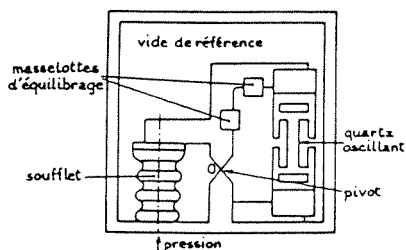


Fig 5. Composantes du capteur de pression

Cette contrainte normale appliquée au cristal va modifier sa fréquence de résonance; cette fréquence propre va augmenter avec la traction et décroître avec la compression.

Un circuit électrique oscillant excite le premier mode de flexion du barreau par effet piézoélectrique. Si, par application d'une contrainte, la fréquence de ce premier mode varie, la déformée du barreau ne sera plus symétrique, et par conséquent la charge piézoélectrique des deux couples d'électrodes déposées sur le barreau ne sera plus équilibrée. Cette charge fournit au circuit oscillant un signal de retour lui permettant de chercher la nouvelle fréquence propre du barreau obtenue lorsque la charge résultante des deux couples d'électrodes est à nouveau nulle (fig. 6).

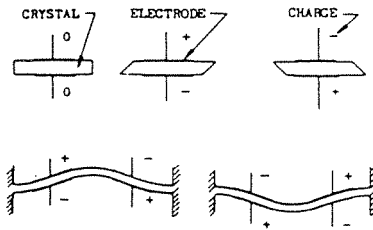


Fig. 6 Schéma de fonctionnement du capteur

La fréquence propre du barreau varie d'une valeur nominale de 40 kHz pour une pression nulle à approximativement 36 kHz à pleine échelle.

La sortie digitale peut facilement être interfacée avec des systèmes à microprocesseur.

Une manière commode de mesurer la période moyenne du signal correspondant à la fréquence propre du barreau est de le comparer au signal d'une horloge à haute fréquence (10 mHz) sur un nombre donné de cycles. Cette moyenne s'effectue sur 10000 périodes en 0,25 secondes. L'erreur introduite, due à l'incertitude sur une période d'horloge, correspond à une résolution en pression de 0,0004% de la pleine échelle.

A la sortie du capteur DIGIQUARTZ est connecté le calculateur de pression Paroscientif. C'est un système constitué d'un microprocesseur qui linéarise les sorties du capteur de pression DIGIQUARTZ.

La relation qui lie la pression appliquée à l'entrée du capteur à la période mesurée s'exprime sous la forme:

$$P = A(1 - \frac{\tau_0}{\tau}) - B(1 - \frac{\tau_0}{\tau})^2$$

τ : période mesurée (μ s)

τ_0 : période propre du quartz au repos

Les coefficients A, B et τ_0 ont été établis lors de l'étalonnage.

2.2. Caractéristiques des capteurs utilisés

Capteur de pression absolue DIGIQUARTZ modèle 2300 - AS. 002

Echelle: 0.300 PSIA

Précision: ± 0.01 bar

Capteur 1 (amont du convergent)

Capteur 2 (aval du convergent)

Capteur 3 (branché au scanivalve)

2.3. Le calculateur de pression PAROSCIENTIFIC

Modèle 700

Version 12.02 (connecté au capteur 3)

25.01 (connecté aux capteurs 1 et 2)

Série: 1335

220 V - 50 Hz

Interface série RS 232

(adresse: 776620 capteur 3)

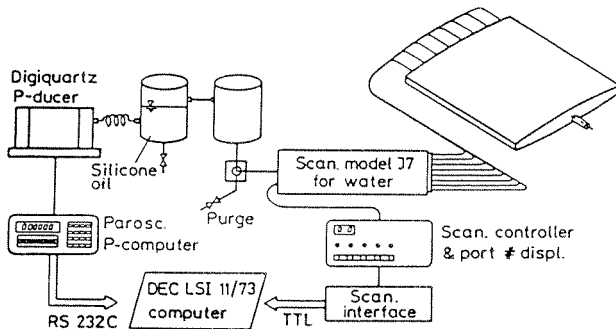
(adresse: 776610 capteurs 1 et 2)

Ce calculateur dispose d'un Convertisseur Analogique Digital (A/D) et d'un pont série RS 232. Les données reçues du capteur de pression digiquartz, après leur traitement dans le Paroscientific, sont envoyées vers l'interface série: DLV 11.J de l'ordinateur PDP 1173.

3. Le scanivalve

Le scanivalve fait partie de la chaîne de pression automatique. Un commutateur de pression électromécanique a été interfacé sur le microordinateur PDP 11.73. L'électronique développée permet de commuter les 19 prises de pression du profil. Cette chaîne de commutation reliée au capteur de pression digiquartz de chez "Paroscientific" permet de relever de manière automatique le champ de pression sur le profil.

Fig. 7 Schéma bloc du scanivalve.



Le scanivalve communique avec le PDP 1173 à travers une carte d'interface parallèle de type ADAC 1664 ATTIL. Cette carte comprend 4 registres de 16 bits codés en BCD. Chaque registre peut être configuré indépendamment en 2 semi-registres servant d'entrée - sortie.

C'est le registre A qui a été configuré pour être interfacé avec le scanivalve (adresse 164100).

On utilise le registre AL comme registre de sortie (bit 0 à bit 7) et le registre AH comme registre d'entrée pour l'interprétation de la position du scanivalve (bit 8 à bit 15).

- bit 15: "1" si le scanivalve est prêt
- bit 14: "1" si le code du scanivalve est binaire
"0" si le code est BCD
- bit 13 8:: numéro du port du scanivalve de 1 à 48
- bit 7: "1" pour mouvoir de 1 pas tous les scanivalves

- bit 6: "1" pour mouvoir à la position HOME (0) tous les scanivalves
- bit 5: "1" pour déplacer d'un pas le scanivalve sélectionné. Revient à "0" quand le pas est effectué
- bit 4: "1" pour mettre à 0 le scanivalve utilisé
- bit 3: pas utilisé
- bit 2: 0: numéro du scanivalve

4. Le thermomètre TELNA

Le thermomètre est formé d'une sonde à résistance de platine (C.T.P.) reliée à un thermomètre numérique.

Ce thermomètre dispose d'une sortie digitale, donnant la valeur de la température codée en binaire. Un mot de 16 bit va donc être échangé à une interface ADAC 1664 ATTIL. Cette carte comprend 4 registres de 10 bit; le registre C a été configuré pour être interfacé avec le thermomètre TELNA TN 705.

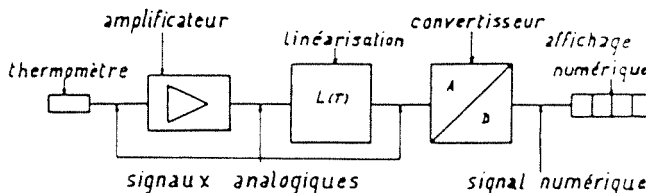


Fig. 8 Schéma de fonctionnement du thermomètre

La sonde à résistance de platine se comporte comme une thermistance, c'est-à-dire que sa résistance électrique varie avec la température ambiante. Ce type de sonde a pour nom "sonde à coefficient de température positif". En linéarisant sa caractéristique, il est aisé de mesurer la température correspondant à la variation de sa résistance. On utilise pour cela un thermomètre numérique qui permet une sortie digitale du signal.

Caractéristique du thermomètre

- sonde de platine PT 100 1/5 DIN
 erreur: $\pm 0.06^{\circ}\text{C}$
- thermomètre numérique modèle TN 705.A
 précision 0.02°C .

SOUS PROGRAMMES DE CALCUL DES COEFFICIENTS D'INFLUENCE

Coordonnées des extrémités du panneau : (x11, x21) (x12, x22)

Coordonnées du point de contrôle : (T1, Y1)

Cas grille :

Vecteur "Pas de la grille" : xinter -iyinter

Singularités σ : sous programme: COEFGRI

Dans le programme principal, il faut poser $A_x = A_y = 0$ avant le premier appel de COEFGRI, correspondant au panneau intrados du bord de fuite. Pour les panneaux suivants, les coefficients BVX et BZY sont calculés à partir des A_x , A_y , Bpx, Bpy provenant du panneau précédent et des Bx, By, Bbx, Bby du panneau en cours.

Si la pente du panneau est supérieure à 1, le coefficient est intégré selon dy ($lc = 1$), sinon selon dx ($lc = 0$).

Si le module Ta du vecteur reliant le milieu du panneau au point de contrôle est inférieur à la demi longueur Tm du panneau, celui-ci est partagé en trois zones de points d'appui (48,5%, 3%, 48,5%) supportant chacune 31 points d'appuis (sous-programmes SIMA pour le calcul des coefficients de pondération pour l'intégration selon la méthode de Simpson et COEFAX pour le calcul de la fonction à intégrer). Si le module du vecteur Ta est supérieur au demi-panneau et inférieur à 2.5% de la corde, le panneau a une zone de 11 points d'appui, et si Ta est supérieur à 2.5% de la corde, 3 points d'appui suffisent (sous-programmes COEFSIM en simple précision ou COEFDIM en double précision pour les grands modules)

Dipôle μ : sous-programme COEFDIG

Cas du profil isolé et du calcul inverse

Singularités σ : sous-programme COEFMA, nécessite le passage aux variables double précision en 32 bits.

Dipôle μ : sous-programme COEFDI

```

      SUBROUTINE COEFGRI
      DIMENSION AB(4),FA(4),SOM(4)
      COMMON/ATT/X11,X12,X21,X22,T1,Y1
      COMMON/MAT/AX,AY,BVX,BVY,BPX,BPY
      COMMON/MAP/XINTER,YINTER,lc
      COMMON/MAS/NS1,DYC
      COMMON NS
      lc=0
      TA=SQRT((T1-.5*(X11+X12))**2.+(Y1-.5*(X21+X22))**2.)
      xtx=abs(x12-x11)
      xty=abs(x22-x21)
      if(xty.gt.xtx) then
        x1=x11
        x11=x21
        x21=x1
        x1=x12
        x12=x22
        x22=x1
        lc=1
      end if
      B1=(X21-X22)/(X11-X12)
      TM=.5*SQRT((X11-X12)**2.+(X21-X22)**2.)
      IF(TA.LT.TM) THEN
        NS=NS1
        XA=X11
        XB=X11+.485*(X12-X11)
        DH=(XB-XA)/6./FLOAT(NS)
        CALL SIMA(SOM,XA,XB)
        DO 8 K=1,4
9       AB(K)=SOM(K)*DH
        XA=XB
        XB=X11+.515*(X12-X11)
        NS=NS1
        DH2=(XB-XA)/6./FLOAT(NS)
        CALL SIMA(SOM,XA,XB)
        DO 9 K=1,4
9       AB(K)=AB(K)+SOM(K)*DH2
        XA=XB
        XB=X12
        NS=NS1
        CALL SIMA(SOM,XA,XB)
        DO 10 K=1,4
10      AB(K)=AB(K)+SOM(K)*DH
        ELSE
        XA=X11
        XB=X12
        IF(TA.LT..025) THEN
          NS=NS1/3
          DH=(XB-XA)/6./FLOAT(NS)
          CALL SIMA(SOM,XA,XB)
          DO 11 K=1,4
11      AB(K)=SOM(K)*DH
        ELSE
          YS=X21
          XS=X11
          DIST=SQRT(T1*T1+Y1*Y1)
          IF(DIST.GE.1.5) CALL COEFDIM(XS,YS,T1,Y1,FA)
          IF(DIST.LT.1.5) CALL COEFSIM(XS,YS,T1,Y1,FA)
          DO 12 J=3,4
12      AB(J)=FA(J)
          XS=(X11+X12)/2.
          YS=(X21+X22)/2.
          IF(DIST.GE.1.5) CALL COEFDIM(XS,YS,T1,Y1,FA)
          IF(DIST.LT.1.5) CALL COEFSIM(XS,YS,T1,Y1,FA)
          DO 13 J=3,4
13      AB(J)=AB(J)+4.*FA(J)
          AB(1)=FA(3)*2.
          AB(2)=FA(4)*2.
          XS=X12

```

```

      YS=X22
      IF (DIST.GE.1.5) CALL COEFDIM(XS,YS,T1,Y1,FA)
      IF (DIST.LT.1.5) CALL COEFSIM(XS,YS,T1,Y1,FA)
      FA(1)=FA(3)
      FA(2)=FA(4)
      DO 14 J=1,4
14 AB(J)=(AB(J)+FA(J))*(X12-X11)/6.
      END IF
      END IF
      BX=(AB(3)-AB(1))/2.
      BY=(AB(4)-AB(2))/2.
      IF (1c.eq.0) THEN
        bbx=1.
        bby=b1
      ELSE
        bbx=b1
        bby=1.
      END IF
      BVX=bbx*BX+bpX*AX-BPy*AY-Bby*BY
      BVY=-bbx*BY-bpX*AY-BPy*AX-Bby*BX
      AX=AB(1)/2.
      AY=AB(2)/2.
      IF (1c.eq.0) THEN
        bpx=1.
        bpy=b1
      ELSE
        bpx=b1
        bpy=1.
      END IF
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE SIMA(SAM,XA,XB)
COMMON NS
DIMENSION SAM(*),F(4)
SAM(1)=0.
SAM(2)=0.
SAM(3)=0.
SAM(4)=0.
DH=(XB-XA)/2./FLOAT(NS)
NP2=2*NS+1
DO 1 J=1,NP2
T=XA+FLOAT(J-1)*DH
IF (J.EQ.1.OR.J.EQ.NP2) THEN
  CO=1.
ELSE
  IF (CO.EQ.1.) THEN
    CO=4.
  ELSE
    IF (CO.EQ.4.) THEN
      CO=2.
    ELSE
      CO=4.
    END IF
  END IF
END IF
CALL COEFAX(T,XA,F)
DO 2 K=1,4
2 SAM(K)=SAM(K)+CO*F(K)
1 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE COEFAX(T,XA,FS)
DIMENSION FS(*)
COMMON/ATT/X11,X12,X21,X22,T1,Y1
COMMON/MAP/XINTER,YINTER,1c
COMPLEX X,Z,ZINT,X1,C1,S1
DY=(X22-X21)/(X12-X11)
TT=(T-X11)/(X12-X11)

```

IMHEF/EPFL

Méthode inverse
codes en FORTRAN

```

YA=X21*(XA-X11)*DY
if (lc.eq.0) Z=CMPLX(T,YA*(T-XA)*DY)
if (lc.eq.1) z=cplx(ya*(t-xa)*dy,c)
X=CMPLX(T1,Y1)
ZINT=CMPLX(XINTER,-YINTER)
X1=4.*ATAN(1.)*(X-Z)/ZINT
C1=CCOS(X1)
S1=CSIN(X1)
X1=C1/S1/ZINT
FS(3)=REAL(X1)
FS(4)=AIMAG(X1)
FS(1)=FS(3)*TT
FS(2)=FS(4)*TT
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE COEFSIM(XA,XB,T1,Y1,FT)
  DIMENSION FT(*)
  COMMON/MAP/XINTER,YINTER,lc
  COMPLEX X,Z,ZINT,X1,C1,S1
  if (lc.eq.0) Z=CMPLX(XA,XB)
  if (lc.eq.1) z=cplx(xb,xa)
  X=CMPLX(T1,Y1)
  ZINT=CMPLX(XINTER,-YINTER)
  X1=4.*ATAN(1.)*(X-Z)/ZINT
  C1=CCOS(X1)
  S1=CSIN(X1)
  X1=C1/S1/ZINT
  FT(3)=REAL(X1)
  FT(4)=AIMAG(X1)
  RETURN
END

```

```

SUBROUTINE COEFDIM(XA,XB,T1,Y1,FT)
  DIMENSION FT(*)
  COMMON/MAP/XINTER,YINTER,lc
  COMPLEX X,Z,ZINT
  COMPLEX*16 SS1,X1,C1,S1
  REAL*8 SS2,F1,F2
  if (lc.eq.0) Z=CMPLX(XA,XB)
  if (lc.eq.1) z=cplx(xb,xa)
  X=CMPLX(T1,Y1)
  ZINT=CMPLX(XINTER,-YINTER)
  X1=4.*ATAN(1.)*(X-Z)/ZINT
  C1=CCOS(X1)
  S1=CSIN(X1)
  SS1=DCONJG(S1)
  SS2=CDABS(S1)
  X1=C1*SS1/SS2/ZINT
  F1=DREAL(X1)
  F2=DIMAG(X1)
  FT(3)=F1
  FT(4)=F2
  RETURN
END

```

```

SUBROUTINE COEFDIG
  COMMON/ATT/X11,X12,X21,X22,T1,Y1
  COMMON/MAT/AX,AY,BVX,BVY,BPX,bpy
  COMMON/MAP/XINTER,YINTER,lc
  COMPLEX X,Z,ZINT,X1,C1,S1,AG,DG
  X=CMPLX(T1,Y1)
  ZINT=CMPLX(XINTER,-YINTER)
  Z=CMPLX(X11,X21)
  PI=4.*ATAN(1.)
  X1=PI*(X-Z)/ZINT
  S1=CSIN(X1)
  C1=CCOS(X1)
  DG=C1/S1
  Z=CMPLX(X12,X22)

```


IMHEF/EPFL

```
X1=PI*(X-Z)/ZINT
S1=CSIN(X1)
C1=CCOS(X1)
DG=PI*PI*PI*(C1/S1-DG)/ZINT/ZINT
BVX=REAL(DG)
BKY=-AIMAG(DG)
RETURN
END
```

Méthode inverse
codes en FORTRAN

```

SUBROUTINE COEFMA
COMMON/ATT/X11,X12,X21,X22,T1,Y1
COMMON/MAT/AX,AY,BVX,BVY,BP
LC=0
IF (X11.EQ.X12) THEN
XU=X21
X21=X11
X11=XU
XU=X22
X22=X12
X12=XU
XU=T1
T1=Y1
Y1=XU
LC=1
END IF
B1=(X21-X22)/(X11-X12)
A1=Y1-X21+B1*X11
A2=B1**2.+1.
B2=-2.*(A1*B1+T1)
C2=A1**2.+T1**2.
D=2.*ABS(T1*B1-A1)
D1=ALOG((A2*X12**2.+B2*X12+C2)/(A2*X11**2.+B2*X11+C2))

H=1./(X12-X11)
G1=-X11*H
A3=2.*A2*X12+B2
A4=2.*A2*X11+B2
D2=ATAN2(A3,D)-ATAN2(A4,D)
C3=2.*D2/D
B3=(D1-B2*C3)/(2.*A2)
A3=(X12-X11)/A2-((B2**2.-2.*A2*C2)*C3-B2*D)/((2.*A2**2.)
G2=-G1-1.
A1X=A1
B1X=-B1
BX=(-H*(B1X*A3+A1X*B3)+G2*(B1X*B3+A1X*C3))
A1Y=T1
B1Y=-1.
BY=(-H*(B1Y*A3+A1Y*B3)+G2*(B1Y*B3+A1Y*C3))
IF (LC.EQ.0) THEN
BVX=AY+BY+B1*BX+AX*BP
BVY=AX+BX-B1*BY-AY*BP
ELSE
BVX=AY+AX*BP+BX
BVY=AX-AY*BP-BY
END IF
AX=(H*(B1X*A3+A1X*B3)+G1*(B1X*B3+A1X*C3))

AY=H*(B1Y*A3+A1Y*B3)+G1*(B1Y*B3+A1Y*C3)
IF (LC.EQ.1) THEN
* B1 EST NUL, ON INTERVERTIT AX ET AY
AU=AX
AX=AY
AY=-AU
END IF
BP=B1
RETURN
END

SUBROUTINE COEFDI
COMMON/ATT/X11,X12,X21,X22,T1,Y1
COMMON/MAT/AX,AY,BVX,BVY,BP
COMPLEX Z1,Z2,X,AC
Z1=CMPLX(X11,X21)
Z2=CMPLX(X12,X22)
X=CMPLX(T1,Y1)
AC=(Z2-Z1)/(X-Z2)
BVX=REAL(AC)
BVY=-AIMAG(AC)
RETURN

```

Curriculum vitae

Né à Lausanne, canton de Vaud, Suisse, le 29 Janvier 1958

Citoyen Helvétique et célibataire

Domicile : Lens, canton du Valais, Suisse

Ecoles primaires et secondaires à Lausanne 1965-1975

Baccalauréat X (Latin - mathématiques) en 1975

Etudes de deuxième cycle à l'EPF Zurich de 1975-1980, section de Mécanique

Diplôme d'ingénieur mécanicien en Janvier 1980, options mécanique des fluides et réglage automatique

Participation au projet SEALEX entre l'Institut d'Aérodynamique de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) et l'institut CERAC SA (Atlas Copco) à Ecublens (Juin 1980 à Juin 1982) (réf. "On liquid film pressure sealing" par J.-N. Favre et I.L. Ryhming, JFE, ASME, vol 107, 1985)

Participation au projet d'étude et de construction du Tunnel Hydrodynamique de Cavitation de l'Institut de Machines Hydrauliques et de Mécanique des Fluides (IMHEF) de l'EPFL, (Juin 1982 à Juin 1984).

Mise au point et applications d'une méthode inverse de tracé de profils dans le cadre du Groupe Cavitation de l'IMHEF. (Janvier 1983 à Décembre 1987) présentée au Symposium de l'AIHR (1986, Montréal) et à la conférence ICIDES II (1987, Penn State University). Rédaction de la thèse EPFL N° 744 intitulée: "Résolution du problème inverse par petites perturbations d'un écoulement potentiel incompressible " (Novembre 1986 à Janvier 1988).

